

数 学

第 I 卷 选择题 (共 30 分)

一、选择题 (本大题共 10 个小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 请选出并在答题卡上将该项涂黑)

1. 计算 $-1 + 2$ 的结果是 (C)

A. -3

B. -1

C. 1

D. 3

2. 如图, 直线 a, b 被直线 c 所截, 下列条件不能判定直线 a 与 b 平行的是 (D)

A. $\angle 1 = \angle 3$

B. $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$

C. $\angle 1 = \angle 4$

D. $\angle 3 = \angle 4$

3. 在体育课上, 甲, 乙两名同学分别进行了 5 次跳远测试, 经计算他们的平均成绩相同. 若要比 较 这两名同学的成绩哪一个更为稳定, 通常需 要 比 较 他 们 成 绩 的 (D)

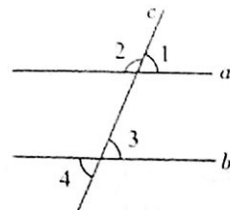
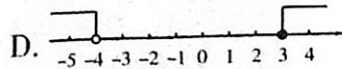
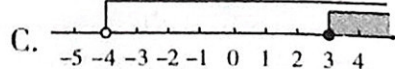
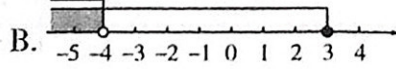
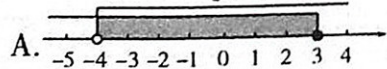
A. 众数

B. 平均数

C. 中位数

D. 方差

4. 将不等式组 $\begin{cases} 2x - 6 \leq 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases}$ 的解集表示在数轴上, 下面表示正确的是 (A)



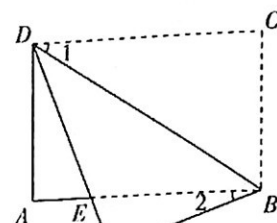
(第 2 题)

5. 下列运算错误的是 (B)

A. $(\sqrt{3}-1)^0=1$ B. $(-3)^2 \div \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$ C. $5x^2-6x^2=-x^2$ D. $(2m^3)^2 \div (2m)^2 = m^4$

6. 如图, 将矩形纸片 $ABCD$ 沿 BD 折叠, 得到 $\triangle BC'D$, $C'D$ 与 AB 交于点 E . 若 $\angle 1 = 35^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数为 (A)

A. 20° B. 30° C. 35° D. 55°



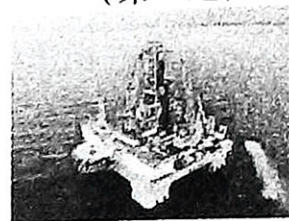
(第6题)

7. 化简 $\frac{4x}{x^2-4} - \frac{x}{x-2}$ 的结果是 (C)

A. $-x^2+2x$ B. $-x^2+6x$ C. $-\frac{x}{x+2}$ D. $\frac{x}{x-2}$

8. 2017年5月18日, 我国宣布在南海神狐海域成功试采可燃冰, 成为世界上首个在海域连续稳定产气的国家. 据粗略估计, 仅南海北部陆坡的可燃冰资源就达到186亿吨油当量, 达到我国陆上石油资源总量的50%. 数据186亿吨用科学记数法可表示为 (C)

A. 186×10^8 吨 B. 18.6×10^9 吨 C. 1.86×10^{10} 吨 D. 0.186×10^{11} 吨



(第8题)

9. 公元前5世纪, 毕达哥拉斯学派中的一名成员希伯索斯发现了无理数 $\sqrt{2}$, 导致了第一次数学危机. $\sqrt{2}$ 是无理数的证明如下:

假设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 那么它可以表示成 $\frac{q}{p}$ (p 与 q 是互质的两个正整数). 于是

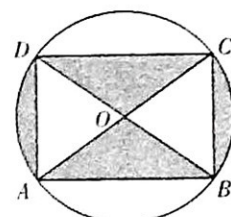
$\left(\frac{q}{p}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$, 所以, $q^2 = 2p^2$. 于是 q^2 是偶数, 进而 q 是偶数. 从而可设 $q = 2m$, 所以 $(2m)^2 = 2p^2$, $p^2 = 2m^2$, 于是可得 p 也是偶数. 这与“ p 与 q 是互质的两个正整数”矛盾, 从而可知“ $\sqrt{2}$ 是有理数”的假设不成立, 所以, $\sqrt{2}$ 是无理数.

这种证明“ $\sqrt{2}$ 是无理数”的方法是 (B)

A. 综合法 B. 反证法 C. 举反例法 D. 数学归纳法

10. 右图是某商品的标志图案. AC 与 BD 是 $\odot O$ 的两条直径, 首尾顺次连接点 A, B, C, D , 得到四边形 $ABCD$. 若 $AC = 10\text{cm}$, $\angle BAC = 36^\circ$, 则图中阴影部分的面积为 (B)

A. $5\pi\text{cm}^2$ B. $10\pi\text{cm}^2$ C. $15\pi\text{cm}^2$ D. $20\pi\text{cm}^2$



(第10题)

第 II 卷 非选择题 (共 90 分)

二、填空题 (本大题共 5 个小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

11. 计算: $4\sqrt{18} - 9\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

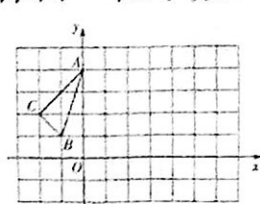
12. 某商店经销一种品牌的洗衣机, 其中某一型号的洗衣机每台进价为 a 元, 商店将进价提高 20% 后作为零售价进行销售, 一段时间后, 商店又以 9 折优惠价促销, 这时该型号洗衣机的零售价为 $1.08a$ 元.

13. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(0, 4)$, $B(-1, 1)$, $C(-2, 2)$. 将 $\triangle ABC$ 向右平移 4 个单位, 得到 $\triangle A'B'C'$, 点 A, B, C 的对应点分别为 A', B', C' , 再将 $\triangle A'B'C'$ 绕点 B' 顺时针旋转 90° , 得到 $\triangle A''B''C''$, 点 A', B', C' 的对应点分别为 A'', B'', C'' , 则点 A'' 的坐标为 $(6, 0)$.

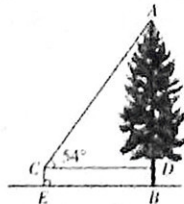


(第12题)

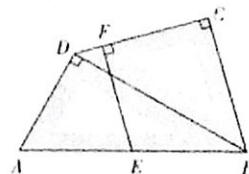
14. 如图, 创新小组要测量公园内一棵树的高度 AB , 其中一名小组成员站在距离树 10 米的点 E 处, 测得树顶 A 的仰角为 54° . 已知测角仪的架高 $CE = 1.5$ 米, 则这颗树的高度为 15.3 米 (结果保留一位小数. 参考数据: $\sin 54^\circ = 0.8090$, $\cos 54^\circ = 0.5878$, $\tan 54^\circ = 1.3764$).



(第13题)



(第14题)



(第15题)

15. 一副三角板按如图方式摆放, 得到 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$, 其中 $\angle ADB = \angle BCD = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle CBD = 45^\circ$. E 为 AB 的中点, 过点 E 作 $EF \perp CD$ 于点 F . 若 $AD = 4\text{cm}$, 则 EF 的长为 $(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ cm.

三、解答题 (本大题共 8 个小题, 共 75 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

16. (本题共 2 个小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

(1) 计算: $(-2)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \sqrt{8} \cdot \sin 45^\circ$.

解: $(-2)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \sqrt{8} \cdot \sin 45^\circ = -8 + 9 - 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$

$= 1 - 2 = -1. \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$

(2) 分解因式: $(y+2x)^2 - (x+2y)^2$.

解：解法一： $(y+2x)^2 - (x+2y)^2$
 $= y^2 + 4xy + 4x^2 - (x^2 + 4xy + 4y^2)$ (6分)
 $= y^2 + 4xy + 4x^2 - x^2 - 4xy - 4y^2$ (7分)
 $= 3x^2 - 3y^2$ (8分)
 $= 3(x^2 - y^2)$ (9分)
 $= 3(x-y)(x+y)$ (10分)

解法二： $(y+2x)^2 - (x+2y)^2$
 $= [(y+2x) + (x+2y)][(y+2x) - (x+2y)]$ (7分)
 $= (y+2x+x+2y)(y+2x-x-2y)$ (8分)
 $= (3x+3y)(x-y)$ (9分)
 $= 3(x+y)(x-y)$ (10分)

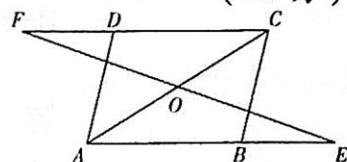
17. (本题6分)

已知：如图，在 $\square ABCD$ 中，延长 AB 至点 E ，延长 CD 至点 F ，使得 $BE=DF$ 。连接 EF ，与对角线 AC 交于点 O 。

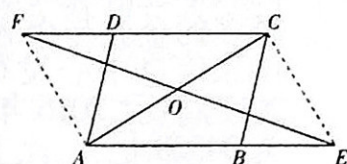
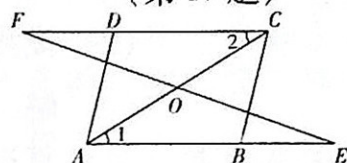
求证： $OE=OF$ 。

证法一： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
 $\therefore AB \parallel CD, AB=CD$ (2分)
 $\because BE=DF, \therefore AB+BE=CD+DF$ ，
 即 $AE=CF$ (3分)
 $\because AB \parallel CD, \therefore AE \parallel CF$.
 $\therefore \angle E = \angle F, \angle 1 = \angle 2$ (4分)
 $\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF$ (5分)
 $\therefore OE=OF$ (6分)

证法二：连接 AF, CE . $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
 $\therefore AB \parallel CD, AB=CD$ (2分)
 $\because BE=DF, \therefore AB+BE=CD+DF$ ，即 $AE=CF$ (3分)
 $\because AB \parallel CD, \therefore AE \parallel CF$ (4分)
 $\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形. (5分)
 $\therefore OE=OF$ (6分)



(第17题)



18. (本题7分) 如图，在平面直角坐标系中，正方形 $OABC$ 的顶点 O 与坐标原点重合，其边长为2，点 A ，点 C 分别在 x 轴， y 轴的正半轴上。函数 $y=2x$ 的图象与 CB 交于点 D ，函数 $y=\frac{k}{x}$ (k 为常数， $k \neq 0$)的图象经过点 D ，与 AB 交于点 E ，与函数 $y=2x$ 的图象在第三象限内交于点 F ，连接 AF, EF 。

(1) 求函数 $y=\frac{k}{x}$ 的表达式，并直接写出 E, F 两点的坐标。

解： $\because$ 正方形 $OABC$ 的边长为2，
 $\therefore$ 点 D 的纵坐标为2，即 $y=2$ 。将 $y=2$ 代入 $y=2x$ ，得 $x=1$ 。
 $\therefore$ 点 D 的坐标为 $(1, 2)$ (1分)

$\because$ 函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 D ， $\therefore 2=\frac{k}{1}, \therefore k=2$ 。

$\therefore$ 函数 $y=\frac{k}{x}$ 的表达式为 $y=\frac{2}{x}$ (2分)

$E(2, 1), F(-1, -2)$ (4分)

(2) 求 $\triangle AEF$ 的面积。

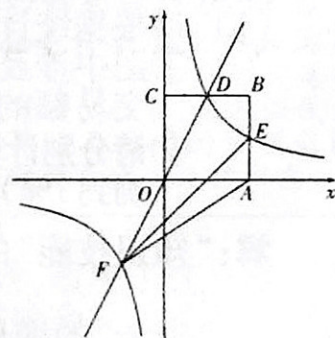
解：过点 F 作 $FG \perp AB$ ，与 BA 的延长线交于点 G 。

$\because E, F$ 两点的坐标分别为 $(2, 1), (-1, -2)$ ，

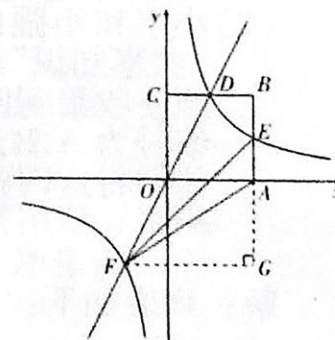
$\therefore AE=1$, (5分)

$FG=2-(-1)=3$ (6分)

$\therefore \triangle AEF$ 的面积为： $\frac{1}{2}AE \cdot FG = \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{3}{2}$ (7分)



(第18题)



19. (本题7分) “春种一粒粟，秋收万颗子”，唐代诗人李绅这句诗中的“粟”即谷子（去皮后则称为“小米”），被誉为中华民族的哺育作物。我省有着“小杂粮王国”的美誉，谷子作为我省杂粮谷物中的大类，其种植面积已连续三年全国第一。2016年全国谷子种植面积为2000万亩，年总产量为150万吨，我省谷子平均亩产量为160kg，国内其他地区谷子的平均亩产量为60kg。请解答下列问题：

(1) 求我省2016年谷子的种植面积是多少万亩。

(2) 2017年，若我省谷子的平均亩产量仍保持160kg不变，要使我省谷子的年总产量不低于52万吨，那么，今年我省至少应再多种植多少万亩的谷子？



(第19题)

解法一：(1) 设我省 2016 年谷子的种植面积为 x 万亩.

由题意，得 $\frac{160}{1000}x + \frac{60}{1000}(2000 - x) = 150$ (2 分)

解，得 $x = 300$ (3 分)
答：我省 2016 年谷子的种植面积是 300 万亩.

(2) 设我省今年应再多种植 y 万亩谷子. 由题意，得 $\frac{160}{1000}(300 + y) \geq 52$ (5 分)

解，得 $y \geq 25$ (6 分)
答：我省今年至少应多种植 25 万亩谷子. (7 分)

解法二：(1) 设我省 2016 年谷子的种植面积为 x 万亩，其他地区谷子的种植面积为 y 万亩.

由题意，得 $\begin{cases} x + y = 2000, \\ \frac{160}{1000}x + \frac{60}{1000}y = 150. \end{cases}$ (2 分)

解，得 $\begin{cases} x = 300, \\ y = 1700. \end{cases}$ (3 分)

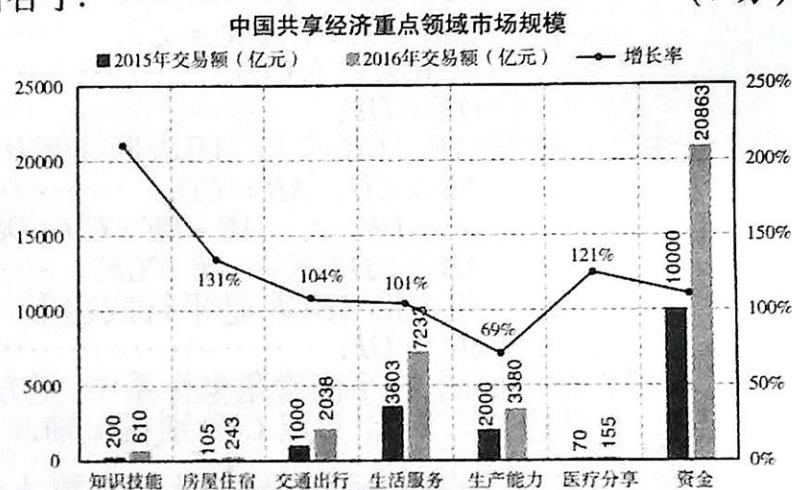
答：我省 2016 年谷子的种植面积是 300 万亩.

(2) 设我省今年应种植 z 万亩谷子. 由题意，得 $\frac{160}{1000}z \geq 52$ (5 分)

解，得 $z \geq 325$. $325 - 300 = 25$ (6 分)
答：我省今年至少应多种植 25 万亩谷子. (7 分)

20. (本题 12 分) 从共享单车, 共享汽车等共享出行到共享充电宝, 共享雨伞等共享物品, 各式各样的共享经济模式在各个领域迅速普及应用, 越来越多的企业和个人成为参与者与受益者. 根据国家信息中心发布的《中国分享经济发展报告 2017》显示, 2016 年我国共享经济市场交易额约为 34520 亿元, 比上年增长 103%; 超 6 亿人参与共享经济活动, 比上年增加约 1 亿人.

下图是源于该报告中的中国共享经济重点领域市场规模统计图:



(1) 请根据统计图解答下列问题:

① 图中涉及的七个重点领域中, 2016 年交易额的中位数是 **2038** 亿元.

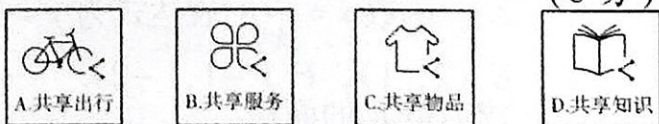
② 请分别计算图中的“知识技能”和“资金”两个重点领域从 2015 年到 2016 年交易额的增长率(精确到 1%), 并就这两个重点领域中的一个分别从交易额和增长率两个方面, 谈谈你的认识.

解: “知识技能”的增长率为: $\frac{610 - 200}{200} = 2.05 = 205\%$.

“资金”的增长率为: $\frac{20863 - 10000}{10000} = 1.0863 \approx 109\%$ (4 分)

对两个领域的认识, 答案不唯一. 例如: “知识技能”领域交易额较小, 但增长率最高, 达到 200% 以上, 其发展速度惊人. 或“资金”领域交易额最大, 2016 年达到 2 万亿以上, 成倍增长, 带动了共享经济市场规模不断扩大. (6 分)

(2) 小宇和小强分别对共享经济中的“共享出行”和“共享知识”最感兴趣, 他们上网查阅了相关资料, 顺便收集到四个共享经济领域的图标, 并将其制成编号为 A, B, C, D 的四张卡片(除编号和内容外, 其余完全相同).



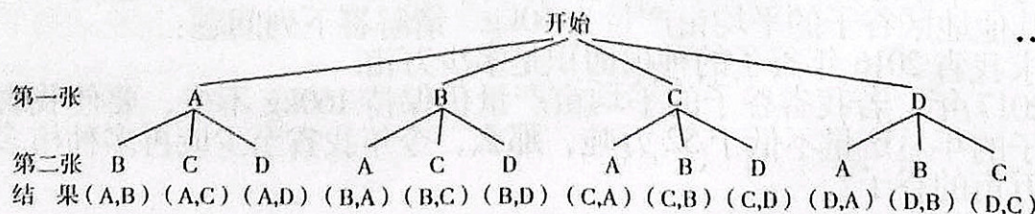
他们将这四张卡片背面朝上, 洗匀放好, 从中随机抽取一张(不放回), 再从中随机抽取一张. 请用列表或画树状图的方法求抽到的两张卡片恰好是“共享出行”和“共享知识”的概率(这四张卡片分别用它们的编号 A, B, C, D 表示).

解: 列表如下:

第二张 \ 第一张	A	B	C	D
A		(A, B)	(A, C)	(A, D)
B	(B, A)		(B, C)	(B, D)
C	(C, A)	(C, B)		(C, D)
D	(D, A)	(D, B)	(D, C)	

... (8 分)

或画树状图如下:



... (8 分)

由列表（或树状图）可知一共有12种可能出现的结果，且每种结果出现的可能性相同，其中抽到“共享出行”和“共享知识”的结果有2种。……………（11分）

所以， $P(\text{抽到“共享出行”和“共享知识”}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 。……………（12分）

- 21.（本题7分）如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ，且 AB 为 $\odot O$ 的直径， $OD \perp AB$ ，与 AC 交于点 E ，与过点 C 的 $\odot O$ 的切线交于点 D 。

（1）若 $AC=4$ ， $BC=2$ ，求 OE 的长。

解： $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径， $\therefore \angle ACB=90^\circ$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ 。

$\therefore AO = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$ 。……………（1分）

$\because OD \perp AB, \therefore \angle AOE = \angle ACB = 90^\circ$ ，又 $\because \angle A = \angle A, \therefore \triangle AOE \sim \triangle ACB$ 。……………（2分）

$\therefore \frac{OE}{BC} = \frac{AO}{AC}, \therefore OE = \frac{BC \cdot AO}{AC} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 。……………（3分）

（2）试判断 $\angle A$ 与 $\angle CDE$ 的数量关系，并说明理由。

证法一： $\angle CDE = 2\angle A$ 。理由如下：

连接 OC 。 $\because OA = OC, \therefore \angle 1 = \angle A$ 。……………（4分）

$\because CD$ 是 $\odot O$ 的切线， $\therefore OC \perp CD$ 。

$\therefore \angle OCD = 90^\circ, \therefore \angle 2 + \angle CDE = 90^\circ$ 。……………（5分）

$\because OD \perp AB, \therefore \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ, \therefore \angle 3 = \angle CDE$ 。……………（6分）

$\because \angle 3 = \angle A + \angle 1 = 2\angle A, \therefore \angle CDE = 2\angle A$ 。……………（7分）

证法二： $\angle CDE = 2\angle A$ 。理由如下：

连接 OC 。 $\because CD$ 是 $\odot O$ 的切线，

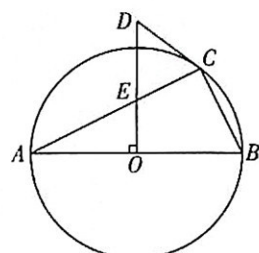
$\therefore OC \perp CD, \therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ 。……………（4分）

$\because OD \perp AB, \therefore \angle AOE = 90^\circ, \therefore \angle A + \angle 3 = 90^\circ$ 。……………（5分）

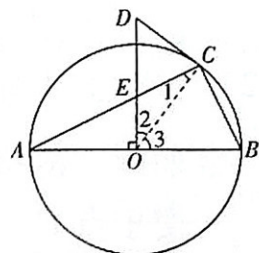
$\because OA = OC, \therefore \angle 1 = \angle A$ 。……………（6分）

$\therefore \angle 2 = \angle 3$ 。又 $\because \angle 3 = \angle 4, \therefore \angle 2 = \angle 4 = \angle 3 = 90^\circ - \angle A$ 。

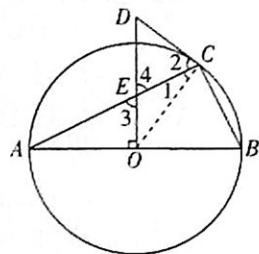
$\therefore \angle CDE = 180^\circ - (\angle 2 + \angle 4) = 180^\circ - 2(90^\circ - \angle A) = 180^\circ - 2 \times 90^\circ + 2\angle A = 2\angle A$ 。……………（7分）



（第21题）



（证法一图）



（证法二图）

22.（本题12分）综合与实践

背景阅读 早在三千多年前，我国周朝数学家商高就提出：将一根直尺折成一个直角，如果勾等于三，股等于四，那么弦就等于五，即“勾三，股四，弦五”。它被记载于我国古代著名数学著作《周髀算经》中。为了方便，在本题中，我们把三边的比为3:4:5的三角形称为(3,4,5)型三角形。例如：三边长分别为9,12,15或 $3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 5\sqrt{2}$ 的三角形就是(3,4,5)型三角形。用矩形纸片按下面的操作方法可以折出这种类型的三角形。

实践操作 如图1，在矩形纸片 $ABCD$ 中， $AD=8\text{cm}$ ， $AB=12\text{cm}$ 。

第一步：如图2，将图1中的矩形纸片 $ABCD$ 沿过点 A 的直线折叠，使点 D 落在 AB 上的点 E 处，折痕为 AF ，再沿 EF 折叠，然后把纸片展平。

第二步：如图3，将图2中的矩形纸片再次折叠，使点 D 与点 F 重合，折痕为 GH ，然后展平，隐去 AF 。

第三步：如图4，将图3中的矩形纸片沿 AH 折叠，得到 $\triangle AD'H$ ，再沿 AD' 折叠，折痕为 AM ， AM 与折痕 EF 交于点 N ，然后展平。

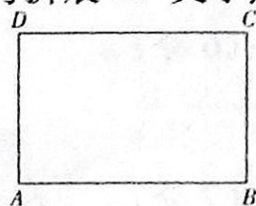


图1

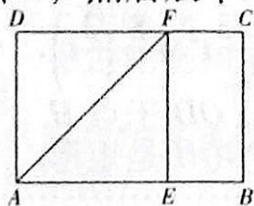


图2

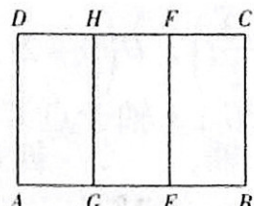


图3

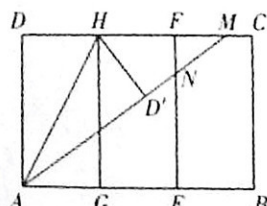


图4

问题解决

（1）请在图2中证明四边形 $AEFD$ 是正方形。

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形， $\therefore \angle D = \angle DAE = 90^\circ$ 。

由折叠知： $AE = AD$ ， $\angle AEF = \angle D = 90^\circ$ 。……………（1分）

$\therefore \angle D = \angle DAE = \angle AEF = 90^\circ, \therefore$ 四边形 $AEFD$ 是矩形。……………（2分）

$\because AE = AD, \therefore$ 矩形 $AEFD$ 是正方形。……………（3分）

（2）请在图4中判断 NF 与 ND' 的数量关系，并加以证明。

解： $NF = ND'$ 。

证明：连接 HN 。由折叠知： $\angle AD'H = \angle D = 90^\circ$ ，

$HF = HD = HD'$ 。……………（4分）

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是正方形， $\therefore \angle EFD = 90^\circ$ 。

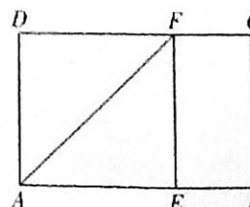


图2

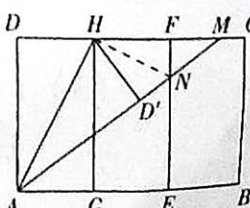


图4

$\because \angle AD'H = 90^\circ, \therefore \angle HD'N = 90^\circ. \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$

在 $\text{Rt}\triangle HNF$ 和 $\text{Rt}\triangle HND'$ 中, $\begin{cases} HN = HN, \\ HF = HD'. \end{cases} \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$

$\therefore \text{Rt}\triangle HNF \cong \text{Rt}\triangle HND'. \therefore NF = ND'. \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$

(3) 请在图 4 中证明 $\triangle AEN$ 是 (3, 4, 5) 型三角形.

解: $\because$ 四边形 $AEFD$ 是正方形, $\therefore AE = EF = AD = 8 \text{ cm}.$
由折叠知: $AD' = AD = 8 \text{ cm}.$ 设 $NF = x \text{ cm},$ 则 $ND' = x \text{ cm},$
 $AN = AD' + ND' = (8 + x) \text{ cm}, EN = EF - NF = (8 - x) \text{ cm}. \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$

在 $\text{Rt}\triangle AEN$ 中, 由勾股定理得 $AN^2 = AE^2 + EN^2.$
即 $(8 + x)^2 = 8^2 + (8 - x)^2.$ 解, 得 $x = 2. \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$

$\therefore AN = 8 + x = 10 (\text{cm}), EN = 8 - x = 6 (\text{cm}). \therefore EN:AE:AN = 6:8:10 = 3:4:5.$
 $\therefore \triangle AEN$ 是 (3, 4, 5) 型三角形. $\dots\dots\dots (9 \text{ 分})$

探索发现

(4) 在不添加字母的情况下, 图 4 中还有哪些三角形是 (3, 4, 5) 型三角形? 请找出并直接写出它们的名称.

解: $\triangle MFN, \triangle MD'H, \triangle MDA. \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$

23. (本题 14 分) 综合与探究

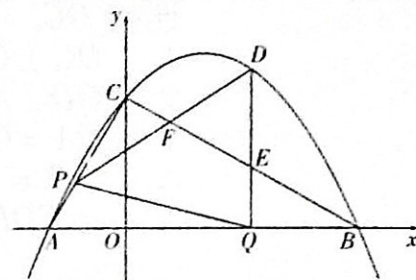
如图, 抛物线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{9}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + 3\sqrt{3}$ 与 x 轴交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 连接 $AC, BC.$ 点 P 沿 AC 以每秒 1 个单位长度的速度由点 A 向点 C 运动, 同时, 点 Q 沿 BO 以每秒 2 个单位长度的速度由点 B 向点 O 运动, 当一个点停止运动时, 另一个点也随之停止运动, 连接 $PQ.$ 过点 Q 作 $QD \perp x$ 轴, 与抛物线交于点 D , 与 BC 交于点 $E.$ 连接 $PD,$ 与 BC 交于点 $F.$ 设点 P 的运动时间为 t 秒 ($t > 0$).

(1) 求直线 BC 的函数表达式.

(2) ①直接写出 P, D 两点的坐标 (用含 t 的代数式表示, 结果需化简).

②在点 P, Q 运动的过程中, 当 $PQ = PD$ 时, 求 t 的值.

(3) 试探究在点 P, Q 运动的过程中, 是否存在某一时刻, 使得点 F 为 PD 的中点. 若存在, 请直接写出此时 t 的值与点 F 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



(第 23 题)

解: (1) 由 $y = 0,$ 得 $-\frac{\sqrt{3}}{9}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + 3\sqrt{3} = 0.$

解, 得 $x_1 = -3, x_2 = 9. \therefore$ 点 B 的坐标为 $(9, 0).$ $\dots (1 \text{ 分})$

由 $x = 0,$ 得 $y = 3\sqrt{3}. \therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, 3\sqrt{3}). \dots (2 \text{ 分})$

设直线 BC 的函数表达式为 $y = kx + b.$

由 B, C 两点的坐标得 $\begin{cases} 9k + b = 0, \\ b = 3\sqrt{3}. \end{cases} \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$

解, 得 $\begin{cases} k = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \\ b = 3\sqrt{3}. \end{cases} \therefore$ 直线 BC 的函数表达式为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3\sqrt{3}. \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$

(2) ① $P\left(\frac{t}{2} - 3, \frac{\sqrt{3}}{2}t\right), D\left(9 - 2t, -\frac{4\sqrt{3}}{9}t^2 + \frac{8\sqrt{3}}{3}t\right). \dots (6 \text{ 分})$

②过点 P 作 $PG \perp x$ 轴于点 $G, PH \perp QD$ 于点 $H.$

$\because QD \perp x$ 轴, $\therefore$ 四边形 $PGQH$ 是矩形.

$\therefore HQ = PG. \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$

$\because PQ = PD, PH \perp QD, \therefore DQ = 2HQ = 2PG. \dots\dots (8 \text{ 分})$

$\therefore P, D$ 两点的坐标分别为 $\left(\frac{t}{2} - 3, \frac{\sqrt{3}}{2}t\right),$

$\left(9 - 2t, -\frac{4\sqrt{3}}{9}t^2 + \frac{8\sqrt{3}}{3}t\right), \therefore -\frac{4\sqrt{3}}{9}t^2 + \frac{8\sqrt{3}}{3}t = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}t. \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$

解, 得 $t_1 = 0$ (舍去), $t_2 = \frac{15}{4}. \therefore$ 当 $PQ = PD$ 时, t 的值为 $\frac{15}{4}. \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$

(3) $t = 3, \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$

$F\left(\frac{3}{4}, \frac{11\sqrt{3}}{4}\right). \dots\dots\dots (14 \text{ 分})$

