

数学试题

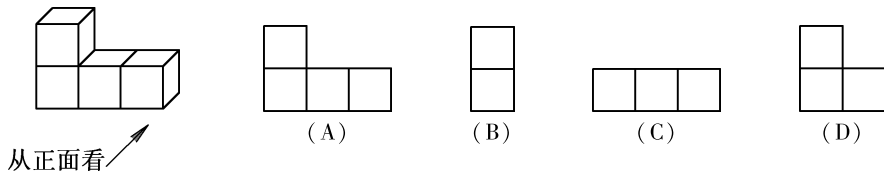
第 I 卷

一、选择题: 本题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

(1) 3 的相反数是

- (A) -3 (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) 3

(2) 如图, 由四个正方体组成的几何体的左视图是



(3) 用科学记数法表示 136 000, 其结果是

- (A) 0.136×10^6 (B) 1.36×10^5 (C) 136×10^3 (D) 1.36×10^6

(4) 化简 $(2x)^2$ 的结果是

- (A) x^4 (B) $2x^2$ (C) $4x^2$ (D) $4x$

(5) 下列关于图形对称性的命题, 正确的是

- (A) 圆既是轴对称图形, 又是中心对称图形
(B) 正三角形既是轴对称图形, 又是中心对称图形
(C) 线段是轴对称图形, 但不是中心对称图形
(D) 菱形是中心对称图形, 但不是轴对称图形

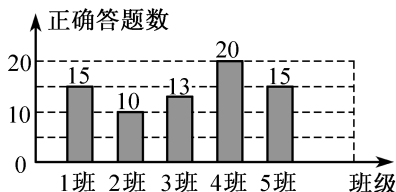
(6) 不等式组 $\begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}$ 的解集是

- (A) $-3 < x \leq 2$ (B) $-3 \leq x < 2$ (C) $x \geq 2$ (D) $x < -3$

(7) 某校举行“汉字听写比赛”, 5 个班级代表队的正确答题数如图.

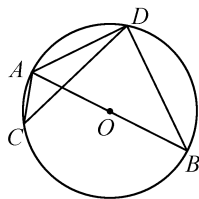
这 5 个正确答题数所组成的一组数据的中位数和众数分别是

- (A) 10, 15
(B) 13, 15
(C) 13, 20
(D) 15, 15



(8) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, C, D 是 $\odot O$ 上位于 AB 异侧的两点. 下列四个角中, 一定与 $\angle ACD$ 互余的角是

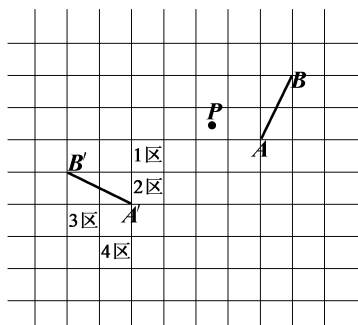
- (A) $\angle ADC$
(B) $\angle ABD$
(C) $\angle BAC$
(D) $\angle BAD$



(9) 若直线 $y = kx + k + 1$ 经过点 $(m, n + 3)$ 和 $(m + 1, 2n - 1)$, 且 $0 < k < 2$, 则 n 的值可以是

- (A) 3 (B) 4
(C) 5 (D) 6

(10) 如图, 网格纸上正方形小格的边长为 1. 图中线段 AB 和点 P 绕着同一个点做相同的旋转, 分别得到线段 $A'B'$ 和点 P' , 则点 P' 所在的单位正方形区域是



- (A) 1 区
(B) 2 区
(C) 3 区
(D) 4 区

第 II 卷

二、填空题: 本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

(11) 计算: $|-2| - 3^0 =$ _____.

(12) 如图, $\triangle ABC$ 中, D, E 分别是边 AB, AC 的中点, 连结 DE , 若 $DE = 3$, 则线段 BC 的长等于 _____.

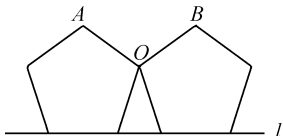
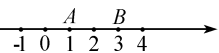
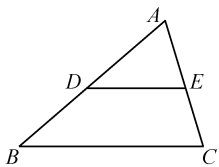
(13) 一个箱子装有除颜色外都相同的 2 个白球, 2 个黄球, 1 个红球. 现添加同种型号的 1 个球, 使得从中随机抽取 1 个球, 这三种颜色的球被抽到的概率都是 $\frac{1}{3}$, 那么

添加的球是 _____.

(14) 已知 A, B, C 是数轴上的三个点, 且 C 在 B 的右侧. 点 A, B 表示的数分别是 1, 3, 如图所示. 若 $BC = 2AB$, 则点 C 表示的数是 _____.

(15) 两个完全相同的正五边形都有一边在直线 l 上, 且有一个公共顶点 O , 其摆放方式如图所示, 则 $\angle AOB$ 等于 _____ 度.

(16) 已知矩形 $ABCD$ 的四个顶点均在反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象上, 且点 A 的横坐标是 2, 则矩形 $ABCD$ 的面积为 _____.



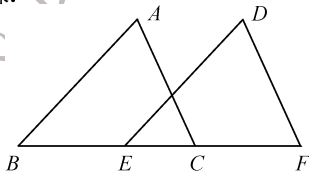
三、解答题: 本题共 9 小题, 共 86 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本小题满分 8 分)

先化简, 再求值: $\left(1 - \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{a}{a^2 - 1}$, 其中 $a = \sqrt{2} - 1$.

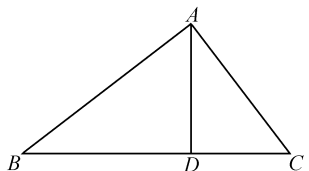
(18) (本小题满分 8 分)

如图, 点 B, E, C, F 在一条直线上, $AB = DE, AC = DF, BE = CE$. 求证: $\angle A = \angle D$.



(19) (本小题满分 8 分)

如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ, AD \perp BC$, 垂足为 D . 求作 $\angle ABC$ 的平分线, 分别交 AD, AC 于 P, Q 两点; 并证明 $AP = AQ$. (要求: 尺规作图, 保留作图痕迹, 不写作法)



(20) (本小题满分 8 分)

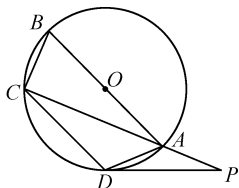
我国古代数学著作《孙子算经》中有“鸡兔同笼”问题: “今有鸡兔同笼, 上有三十五头, 下有九十四足. 问鸡兔各几何.” 其大意是: “有若干只鸡和兔关在同一笼子里, 它们一共有 35 个头, 94 条腿. 问笼中的鸡和兔各有多少只?” 试用列方程(组)解应用题的方法求出问题的解.

(21) (本小题满分 8 分)

如图, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 P 在 CA 的延长线上, $\angle CAD = 45^\circ$.

(I) 若 $AB = 4$, 求 $\widehat{CD}$ 的长;

(II) 若 $\widehat{BC} = \widehat{AD}, AD = AP$, 求证: PD 是 $\odot O$ 的切线.



(22) (本小题满分 10 分)

小明在某次作业中得到如下结果:

$$\sin^2 7^\circ + \sin^2 83^\circ \approx 0.12^2 + 0.99^2 = 0.9945,$$

$$\sin^2 22^\circ + \sin^2 68^\circ \approx 0.37^2 + 0.93^2 = 1.0018,$$

$$\sin^2 29^\circ + \sin^2 61^\circ \approx 0.48^2 + 0.87^2 = 0.9873,$$

$$\sin^2 37^\circ + \sin^2 53^\circ \approx 0.60^2 + 0.80^2 = 1.0000,$$

$$\sin^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1.$$

据此, 小明猜想: 对于任意锐角 α , 均有 $\sin^2 \alpha + \sin^2 (90^\circ - \alpha) = 1$.

(I) 当 $\alpha = 30^\circ$ 时, 验证 $\sin^2 \alpha + \sin^2 (90^\circ - \alpha) = 1$ 是否成立;

(II) 小明的猜想是否成立? 若成立, 请给予证明; 若不成立, 请举出一个反例.

(23) (本小题满分 10 分)

自 2016 年国庆后,许多高校均投放了使用手机就可随取随用的共享单车.某运营商为提高其经营的 A 品牌共享单车的市场占有率,准备对收费作如下调整:一天中,同一个人第一次使用的车费按 0.5 元收取,每增加一次,当次车费就比上次车费减少 0.1 元,第 6 次开始,当次用车免费.具体收费标准如下:

使用次数	0	1	2	3	4	5(含 5 次以上)
累计车费	0	0.5	0.9	a	b	1.5

同时,就此收费方案随机调查了某高校 100 名师生在一天中使用 A 品牌共享单车的意愿,得到如下数据:

使用次数	0	1	2	3	4	5
人数	5	15	10	30	25	15

(I) 写出 a, b 的值;

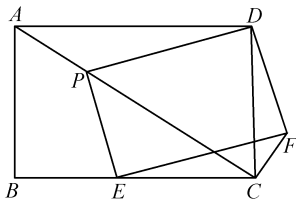
(II) 已知该校有 5000 名师生,且 A 品牌共享单车投放该校一天的费用为 5800 元.试估计:收费调整后,此运营商在该校投放 A 品牌共享单车能否获利?说明理由.

(24) (本小题满分 12 分)

如图,矩形 $ABCD$ 中, $AB = 6, AD = 8, P, E$ 分别是线段 AC, BC 上的点,且四边形 $PEFD$ 为矩形.

(I) 若 $\triangle PCD$ 是等腰三角形,求 AP 的长;

(II) 若 $AP = \sqrt{2}$,求 CF 的长.



(25) (本小题满分 14 分)

已知直线 $y = 2x + m$ 与抛物线 $y = ax^2 + ax + b$ 有一个公共点 $M(1, 0)$, 且 $a < b$.

(I) 求抛物线顶点 Q 的坐标(用含 a 的代数式表示);

(II) 说明直线与抛物线有两个交点;

(III) 直线与抛物线的另一个交点记为 N .

(i) 若 $-1 \leq a \leq -\frac{1}{2}$, 求线段 MN 长度的取值范围;

(ii) 求 $\triangle QMN$ 面积的最小值.

数学试题参考答案

一、选择题:每小题 4 分,满分 40 分.

(1)A (2)B (3)B (4)C (5)A (6)A (7)D (8)D (9)C (10)D

二、填空题:每小题 4 分,满分 24 分.

(11)1 (12)6 (13)红球(或红色的)

(14)7 (15)108 (16) $\frac{15}{2}$

三、解答题:本题共 9 小题,共 86 分.

(17) 本小题满分 8 分.

$$\text{解:原式} = \frac{a-1}{a} \cdot \frac{a}{(a+1)(a-1)} = \frac{1}{a+1}.$$

$$\text{当 } a = \sqrt{2} - 1 \text{ 时,原式} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

说明:本参考答案仅给出一种解法供参考.

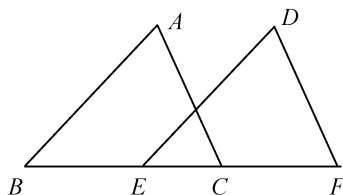
(18) 本小题满分 8 分.

证明: $\because BE = CF, \therefore BE + EC = CF + EC$, 即 $BC = EF$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,

$$\begin{cases} AB = DE, \\ AC = DF, \\ BC = EF, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF, \therefore \angle A = \angle D$.



(19) 本小题满分 8 分.

解: BQ 就是所求作的 $\angle ABC$ 的平分线, P, Q 就是所求作的点.

证明如下:

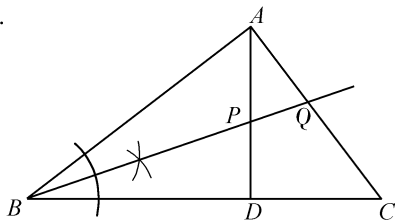
$$\because AD \perp BC, \therefore \angle ADB = 90^\circ, \therefore \angle BPD + \angle PBD = 90^\circ.$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ, \therefore \angle AQP + \angle ABQ = 90^\circ.$$

$$\because \angle ABQ = \angle PBD, \therefore \angle BPD = \angle AQP.$$

$$\because \angle BPD = \angle APQ, \therefore \angle APQ = \angle AQP, \therefore AP = AQ.$$

说明: 本参考答案仅给出一种解法供参考.



(20) 本小题满分 8 分.

解: 设鸡有 x 只, 兔有 y 只.

$$\text{依题意, 得 } \begin{cases} x + y = 35, \\ 2x + 4y = 94, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = 23, \\ y = 12. \end{cases}$$

答: 鸡有 23 只, 兔有 12 只.

说明: 本参考答案仅给出一种解法供参考.

(21) 本小题满分 8 分, 其中 (I) 4 分, (II) 4 分.

解: (I) 连结 OC, OD . $\because \angle COD = 2\angle CAD, \angle CAD = 45^\circ, \therefore \angle COD = 90^\circ$.

$$\because AB = 4, \therefore OC = \frac{1}{2}AB = 2.$$

$$\therefore \widehat{CD} \text{ 的长} = \frac{90}{180} \times \pi \times 2 = \pi.$$

$$(II) \because \widehat{BC} = \widehat{AD}, \therefore \angle BOC = \angle AOD.$$

$$\because \angle COD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = \frac{180^\circ - \angle COD}{2} = 45^\circ.$$

$$\because OA = OD, \therefore \angle ODA = \angle OAD.$$

$$\because \angle AOD + \angle ODA + \angle OAD = 180^\circ, \therefore \angle ODA = \frac{180^\circ - \angle AOD}{2} = 67.5^\circ.$$

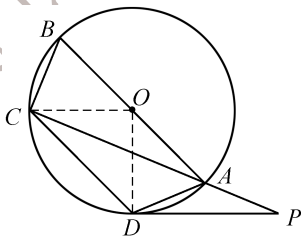
$$\because AD = AP, \therefore \angle ADP = \angle APD.$$

$$\because \angle CAD = \angle ADP + \angle APD, \angle CAD = 45^\circ, \therefore \angle ADP = \frac{1}{2} \angle CAD = 22.5^\circ.$$

$$\therefore \angle ODP = \angle ODA + \angle ADP = 90^\circ.$$

又 $\because OD$ 是半径, $\therefore PD$ 是 $\odot O$ 的切线.

说明: 本参考答案仅给出一种解法供参考.



(22) 本小题满分 10 分, 其中 (I) 5 分, (II) 5 分.

解: (I) 当 $\alpha = 30^\circ$ 时, $\sin^2 \alpha + \sin^2(90^\circ - \alpha)$

$$= \sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

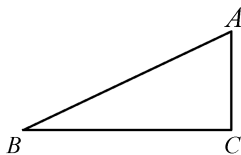
所以 $\sin^2 \alpha + \sin^2(90^\circ - \alpha) = 1$ 成立.

(II) 小明的猜想成立. 证明如下:

如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$,

设 $\angle A = \alpha$, 则 $\angle B = 90^\circ - \alpha$.

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \sin^2(90^\circ - \alpha) &= \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \\ &= \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1. \end{aligned}$$



说明: 本参考答案仅给出一种解法供参考.

(23) 本小题满分 10 分,其中(I) 4 分,(II) 6 分.

解:(I) $a = 1.2, b = 1.4$.

(II) 根据用车意愿调查结果,抽取的 100 名师生每人每天使用 A 品牌共享单车的平均车费为:

$$\frac{1}{100}(0 \times 5 + 0.5 \times 15 + 0.9 \times 10 + 1.2 \times 30 + 1.4 \times 25 + 1.5 \times 15) = 1.1(\text{元}).$$

所以估计该校 5000 名师生一天使用 A 品牌共享单车的总车费为:

$$5000 \times 1.1 = 5500(\text{元}).$$

因为 $5500 < 5800$,故收费调整后,此运营商在该校投放 A 品牌共享单车不能获利.

说明:本参考答案仅给出一种解法供参考.

(24) 本小题满分 12 分,其中(I) 6 分,(II) 6 分.

解:(I) 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 6, AD = 8, \angle ADC = 90^\circ$,

$$\therefore DC = AB = 6, \therefore AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = 10.$$

要使 $\triangle PCD$ 是等腰三角形,有如下三种情况:

(1) 当 $CP = CD$ 时, $CP = 6, \therefore AP = AC - CP = 4$.

(2) 当 $PD = PC$ 时, $\angle PDC = \angle PCD$,

$$\therefore \angle PCD + \angle PAD = \angle PDC + \angle PDA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PAD = \angle PDA, \therefore PD = PA,$$

$$\therefore PA = PC, \therefore AP = \frac{AC}{2}, \text{即 } AP = 5.$$

(3) 当 $DP = DC$ 时,过 D 作 $DQ \perp AC$ 于 Q ,则 $PQ = CQ$.

$$\therefore S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}AD \cdot DC = \frac{1}{2}AC \cdot DQ,$$

$$\therefore DQ = \frac{AD \cdot DC}{AC} = \frac{24}{5},$$

$$\therefore CQ = \sqrt{DC^2 - DQ^2} = \frac{18}{5},$$

$$\therefore PC = 2CQ = \frac{36}{5}, \therefore AP = AC - PC = \frac{14}{5}.$$

综上所述,若 $\triangle PCD$ 是等腰三角形, $AP = 4$, 或 $AP = 5$, 或 $AP = \frac{14}{5}$.

(II) 连结 PF, DE , 记 PF 与 DE 的交点为 O , 连结 OC .

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 和 $PEFD$ 都是矩形,

$$\therefore \angle ADC = \angle PDF = 90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle ADP + \angle PDC = \angle PDC + \angle CDF,$$

$$\therefore \angle ADP = \angle CDF.$$

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ, OE = OD, \therefore OC = \frac{1}{2}ED.$$

$$\text{在矩形 } PEFD \text{ 中, } PF = DE, \therefore OC = \frac{1}{2}PF.$$

$$\therefore OP = OF = \frac{1}{2}PF, \therefore OC = OP = OF,$$

$$\therefore \angle OCF = \angle OFC, \angle OCP = \angle OPC,$$

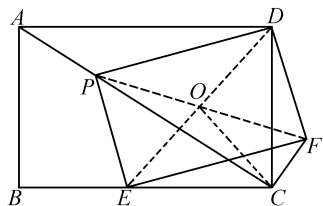
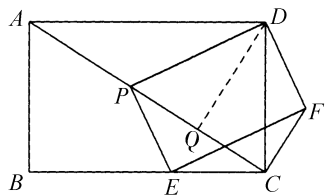
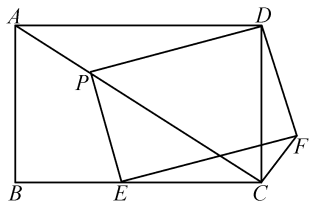
$$\text{又 } \angle OPC + \angle OFC + \angle PCF = 180^\circ,$$

$$\therefore 2\angle OCP + 2\angle OCF = 180^\circ, \therefore \angle PCF = 90^\circ, \text{即 } \angle PCD + \angle FCD = 90^\circ.$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADC \text{ 中, } \angle PCD + \angle PAD = 90^\circ, \therefore \angle PAD = \angle FCD.$$

$$\therefore \triangle ADP \sim \triangle CDF, \therefore \frac{CF}{AP} = \frac{CD}{AD} = \frac{3}{4}. \therefore AP = \sqrt{2}, \therefore CF = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

说明:本参考答案仅给出一种解法供参考.



(25) 本小题满分 14 分, 其中(Ⅰ)2 分, (Ⅱ)4 分, (Ⅲ)8 分.

解:(Ⅰ) 因为抛物线过点 $M(1,0)$, 所以 $a + a + b = 0$, 即 $b = -2a$.

$$\text{所以 } y = ax^2 + ax + b = ax^2 + ax - 2a = a \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{9a}{4},$$

$$\text{所以抛物线顶点 } Q \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{9a}{4} \right).$$

(Ⅱ) 因为直线 $y = 2x + m$ 经过点 $M(1,0)$, 所以 $0 = 2 \times 1 + m$, 解得 $m = -2$.

把 $y = 2x - 2$ 代入 $y = ax^2 + ax - 2a$, 得 $ax^2 + (a - 2)x - 2a + 2 = 0$, (*)

$$\text{所以 } \Delta = (a - 2)^2 - 4a(-2a + 2) = 9a^2 - 12a + 4,$$

由(Ⅰ) 知 $b = -2a$, 又 $a < b$, 所以 $a < 0, b > 0$.

所以 $\Delta > 0$, 所以方程(*) 有两个不相等的实数根,

故直线与抛物线有两个交点.

(Ⅲ) 把 $y = 2x - 2$ 代入 $y = ax^2 + ax - 2a$,

$$\text{得 } ax^2 + (a - 2)x - 2a + 2 = 0, \text{ 即 } x^2 + \left(1 - \frac{2}{a} \right)x - 2 + \frac{2}{a} = 0,$$

$$\text{所以 } \left[x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a} \right) \right]^2 = \left(\frac{1}{a} - \frac{3}{2} \right)^2, \text{ 解得 } x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{a} - 2,$$

$$\text{所以点 } N \left(\frac{2}{a} - 2, \frac{4}{a} - 6 \right).$$

(ⅰ) 根据勾股定理得,

$$\begin{aligned} MN^2 &= \left[\left(\frac{2}{a} - 2 \right) - 1 \right]^2 + \left(\frac{4}{a} - 6 \right)^2 \\ &= \frac{20}{a^2} - \frac{60}{a} + 45 = 20 \left(\frac{1}{a} - \frac{3}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\text{因为 } -1 \leq a \leq -\frac{1}{2},$$

$$\text{由反比例函数性质知 } -2 \leq \frac{1}{a} \leq -1, \text{ 所以 } \frac{1}{a} - \frac{3}{2} < 0,$$

$$\text{所以 } MN = 2\sqrt{5} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{a} \right) = 3\sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5}}{a},$$

$$\text{所以 } 5\sqrt{5} \leq MN \leq 7\sqrt{5}.$$

(ⅱ) 作直线 $x = -\frac{1}{2}$ 交直线 $y = 2x - 2$ 于点 E .

$$\text{把 } x = -\frac{1}{2} \text{ 代入 } y = 2x - 2 \text{ 得, } y = -3, \text{ 即 } E \left(-\frac{1}{2}, -3 \right).$$

$$\text{又因为 } M(1,0), N \left(\frac{2}{a} - 2, \frac{4}{a} - 6 \right), \text{ 且由(Ⅱ) 知 } a < 0,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \triangle QMN \text{ 的面积 } S &= S_{\triangle QEN} + S_{\triangle QEM} = \frac{1}{2} \left| \left(\frac{2}{a} - 2 \right) - 1 \right| \cdot \left| -\frac{9a}{4} - (-3) \right| \\ &= \frac{27}{4} - \frac{3}{a} - \frac{27a}{8}. \end{aligned}$$

$$\text{即 } 27a^2 + (8S - 54)a + 24 = 0, (*)$$

因为关于 a 的方程(*) 有实数根,

$$\text{所以 } \Delta = (8S - 54)^2 - 4 \times 27 \times 24 \geq 0, \text{ 即 } (8S - 54)^2 \geq (36\sqrt{2})^2,$$

$$\text{又因为 } a < 0, \text{ 所以 } S = \frac{27}{4} - \frac{3}{a} - \frac{27a}{8} > \frac{27}{4}, \text{ 所以 } 8S - 54 > 0,$$

$$\text{所以 } 8S - 54 \geq 36\sqrt{2}, \text{ 即 } S \geq \frac{27}{4} + \frac{9\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{当 } S = \frac{27}{4} + \frac{9\sqrt{2}}{2} \text{ 时, 由方程(*) 可得 } a = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ 满足题意.}$$

$$\text{故当 } a = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, b = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ 时, } \triangle QMN \text{ 面积的最小值为 } \frac{27}{4} + \frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

说明:本参考答案仅给出一种解法供参考.

