

高中数学教师专业能力考核试卷

学校：

姓名：

得分：

一、单选题（本大题共 16 小题，每小题 3 分，共 48 分）

在下列各小题的四个选项中，只有一项的符合题目要求的

1. 已知集合 $A = \{x | y = \sqrt{2x-1}\}$ ，集合 $B = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ ，则 $A \cap B =$ ()

- A. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ B. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ C. $[0, 1]$ D. $[0, +\infty)$

2. 若复数 $z = \frac{2}{1+i}$ ，则 $|z-2i| =$ ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{10}$ D. 10

3. 数学是研究 () 的一门科学。

- A. 数量关系与空间形式 B. 数字与图形
C. 计算与推理 D. 统计与概率

4. 从两名男同学和四名女同学中随机选出三人参加数学竞赛，则恰好选出一名男同学和两名女同学的概率为 ()

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{1}{2}$

5. 第九届亚冬会在哈尔滨举行，参加自由式滑雪女子大跳台决赛的六位选手的得分如下：119.50，134.75，154.75，159.50，162.75，175.50，则该组数据的第 40 百分位数为 ()

- A. 134.75 B. 144.75 C. 154.75 D. 159.50

6. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(3, \sigma^2)$ ，且 $P(X > 2) = 0.7$ ，则 $P(3 < X < 4) =$ ()

- A. 0.1 B. 0.2 C. 0.3 D. 0.4

7. 曲线 $y = f(x) = \ln(x^2 + x - 1)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 ()

- A. $y = 3x - 3$ B. $y = 2x - 2$ C. $y = x - 1$ D. $y = 0$

8. 双曲线 $y^2 - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 的离心率为 $\sqrt{5}$ ，则该双曲线的焦点到它的渐近线距离为 ()

- A. 1 B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. 3

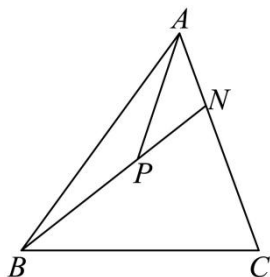
9. 等差数列的前 n 项和为 S_n ，若 $S_2 = 5$ ， $S_5 = 10$ ，则 $S_8 =$ ()

- A. 8 B. 10 C. 12 D. 15

10. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，面积为 $\sqrt{3}$, $B = 60^\circ$, $a^2 + c^2 = 3ac$ ，则 $b =$ ()

- A. $4\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 8 D. 2

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NC}$ ， P 是 BN 上的一点，若 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ ，则实数 m 的值为 ()



- A. $\frac{9}{11}$ B. $\frac{5}{11}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{5}$

12. 将函数 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的一半 (纵坐标不变)，再将图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，得到的函数的表达式为 ()

- A. $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ B. $y = \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ C. $y = \sin\left(2x + \frac{7\pi}{12}\right)$ D. $y = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{11\pi}{24}\right)$

13. 已知 $f(x)$ 为定义在 $(-4, 4)$ 上的奇函数，若 $f(x)$ 在 $[0, 4)$ 上单调递减，则满足不等式

$f(a+1) + f(1-a^2) > 0$ 的实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\sqrt{5}, +\infty)$ B. $(-\sqrt{5}, 2)$ C. $(-\sqrt{5}, -1) \cup (2, \sqrt{5})$ D. $(-\sqrt{5}, -1) \cup (1, \sqrt{5})$

14. 已知直线 l, m, n 与平面 α, β ，下列命题正确的是 ()

- A. 若 $l \perp n$, $m \perp n$ ，则 $l \parallel m$ B. 若 $l \perp \alpha$, $l \parallel \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$
C. 若 $l \parallel \alpha$, $l \perp m$ ，则 $m \perp \alpha$ D. 若 $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = m$, $l \perp m$ ，则 $l \perp \beta$

15. 已知 $a = \frac{1}{e}$, $b = \frac{\ln 3}{3}$, $c = \frac{\ln 2}{2}$ ，则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $b < c < a$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

16. 已知三棱锥 $S-ABC$ 底面是边长为 $\sqrt{3}$ 的正三角形， $SA \perp$ 平面 ABC ，且 $SA = 2\sqrt{3}$ ，则该三棱锥的外接球的体积为 ()

- A. $\frac{32\pi}{3}$ B. $4\sqrt{3}\pi$ C. $\sqrt{6}\pi$ D. $\frac{8\pi}{3}$

二、填空题 (本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分)

17. 已知 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 则 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.

18. 在 $\left(2x^3 - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中, x^2 的系数为_____.

19. 高中数学学科核心素养包括_____, _____, 数学建模, 直观想象, 数学运算与数据分析.

20. 曲线 $y = x^3 - 3x$ 与 $y = -(x-1)^2 + a$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的交点, 则 a 的取值范围为_____.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 每小题 6 分, 共 36 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

21. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $b\cos A + a\cos B = -2c\cos C$.

(1) 求 C 的大小;

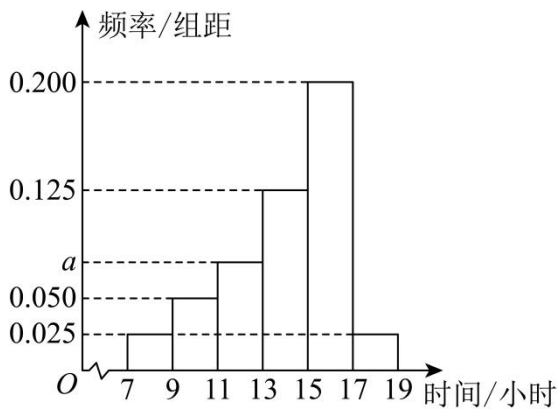
(2) 若 $b = 2a$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 求 c .

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列, 若 $a_1 = 1$, 且 a_2, a_4, a_8 成等比数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

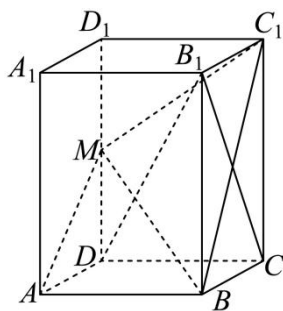
(2) 若 $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;

23. 为了更好地了解中学生的体育锻炼时间, 某校展开了一次调查, 从全校学生中随机选取 100 人, 统计了他们一周参加体育锻炼时间 (单位: 小时), 分别位于区间 $[7, 9), [9, 11), [11, 13), [13, 15), [15, 17), [17, 19]$, 用频率分布直方图表示如下图. 假设用频率估计概率, 且每个学生参加体育锻炼时间相互独立.



- (1)求 a 的值;
- (2)估计全校学生一周参加体育锻炼时间的第80百分位数;
- (3)从全校学生中随机选取3人,记 X 表示这3人一周参加体育锻炼时间在区间 $[13,15)$ 内的人数,求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$.

24. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为棱 DD_1 的中点, $AB=1$, $AD=2$, $AA_1=2\sqrt{2}$.



- (1)求证: $AM \perp$ 平面 B_1CD ;
- (2)求平面 BMC_1 与平面 B_1CD 的夹角的余弦值.

25. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 上顶点为 $M(0,1)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- (1)求椭圆 C 的方程;

(2)过点 $(-1,-1)$ 的直线交椭圆 C 于 A,B 两点, 设直线 MA,MB 的斜率分别为 k_1,k_2 , 证明: k_1 与 k_2 的和为定值.

26. 已知函数 $f(x)=(a-1)\ln x+x+\frac{a}{x}(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $a=-2$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2)若存在 $x\in(1,+\infty)$, 使得 $f(x)\leq\frac{a}{x}$ 成立, 求 a 的取值范围.

教师专业能力考核试题(高中数学)参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	C	A	C	C	B	A	B	C	B
题号	11	12	13	14	15	16				
答案	C	A	C	B	B	A				

1. B

【分析】求得集合 A，再用交集运算求解.

【详解】由 $2x-1 \geq 0$ 解得， $x \geq \frac{1}{2}$ ，所以 $A = \left\{x \mid x \geq \frac{1}{2}\right\}$ ，

所以 $A \cap B = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ，

故选：B.

2. C

【分析】根据复数的除法运算及模长计算公式即可求解.

【详解】 $z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{2} = 1-i$ ，

则 $|z-2i| = |1-3i| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$ ，

故选：C.

3. A

【分析】数学是研究数量关系与空间形式的一门科学

故选：A

4. C

【分析】根据古典概型的概率公式可得解.

【详解】六名同学选 3 名同学，有 $C_6^3 = 20$ 种选法，

其中恰好选出一名男同学和两名女同学有 $C_2^1 \cdot C_4^2 = 2 \times 6 = 12$ 种选法，

所以 $P = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ ，

故选：C.

5. C

【分析】根据百分位数的定义求解.

【详解】六位选手得分由小到大排列如下：

119.50, 134.75, 154.75, 159.50, 162.75, 175.50,

因为 $6 \times 40\% = 2.4$,

所以该组数据的第 40 百分位数为第三个数 154.75.

故选: C

6. B

【分析】利用正态分布的对称性即可得到结果.

【详解】因为随机变量 X 服从正态分布 $N(3, \sigma^2)$, 所以正态分布的对称轴为 $x = 3$,

所以 $P(3 < X < 4) = P(2 < X < 3) = P(X > 2) - 0.5 = 0.2$,

故选: B

7. A

【分析】先求出导函数得出切线斜率, 再应用点斜式写出直线方程.

【详解】 $f(1) = 0, f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}, f'(1) = 3$, 所求切线方程为 $y = 3x - 3$.

故选: A.

8. B

【分析】根据离心率求出 $c = \sqrt{5}$, $b = 2$, 得到焦点坐标和渐近线方程, 利用点到直线距离公式求出答案.

【详解】 $y^2 - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 中, $a = 1$, 故 $\frac{c}{a} = c = \sqrt{5}$,

故 $b^2 = c^2 - a^2 = 5 - 1 = 4$, 故 $b = 2$,

所以双曲线的焦点坐标为 $(0, \pm\sqrt{5})$, 渐近线方程为 $y = \pm\frac{1}{2}x$,

所以该双曲线的焦点到它的渐近线距离为 $\frac{|\pm\sqrt{5}|}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = 2$

故选: B

9. C

【分析】由等差数列前项和公式列方程组求得 a_1 和公差 d 后可得结果.

【详解】设等差数列首项 a_1 和公差 d ,

由 $S_2 = 5$, $S_5 = 10$,

$$\text{则} \begin{cases} 2a_1 + d = 5 \\ 5a_1 + 10d = 10 \end{cases}, \text{解得 } a_1 = \frac{8}{3}, d = -\frac{1}{3}$$

$$\text{则 } S_8 = 8 \times \frac{8}{3} + \frac{8 \times 7}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 12.$$

故选：C.

10. B

【分析】由三角形面积公式可得 $ac = 4$ ，再结合余弦定理即可得解.

$$\text{【详解】由题意, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{4} ac = \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } ac = 4, a^2 + c^2 = 12,$$

$$\text{所以 } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 12 - 2 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8,$$

$$\text{解得 } b = 2\sqrt{2} \text{ 或 } b = -2\sqrt{2} \text{ (舍去)}.$$

故选：B.

11. C

【分析】根据条件得到 $\vec{AP} = m\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AN}$ ，由共线定理的推论得到方程，求出答案.

$$\text{【详解】 } \vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{NC}, \text{ 故 } \vec{AC} = 4\vec{AN},$$

$$\vec{AP} = m\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}, \text{ 故 } \vec{AP} = m\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AN},$$

$$\text{因为 } B, P, N \text{ 三点共线, 故 } m + \frac{2}{3} = 1, \text{ 解得 } m = \frac{1}{3}.$$

故选：C

12. A

【分析】利用三角函数图象变换可得出平移后所得函数的解析式.

【详解】将函数 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的一半（纵坐标不变），

可得到函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，

再将所得函数的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，

$$\text{可得到函数 } y = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ 的图象.}$$

故选：A.

13. C

【分析】根据奇函数的性质得 $f(x)$ 在 $(-4, 4)$ 上单调递减，再根据奇函数性质将

$$f(a+1)+f(1-a^2)>0 \text{ 化为 } f(a+1)>f(a^2-1), \text{ 结合定义域利用单调性得 } \begin{cases} -4<a+1<4 \\ -4<a^2-1<4, \\ a+1<a^2-1 \end{cases}$$

解不等式组即可解答.

【详解】因为 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(a+1)+f(1-a^2)>0$ 可化为

$$f(a+1)>-f(1-a^2)=f(a^2-1).$$

又 $f(x)$ 在 $[0, 4)$ 上单调递减且 $f(x)$ 是定义在 $(-4, 4)$ 上的奇函数，所以 $f(x)$ 在 $(-4, 4)$ 上单调递减.

$$\text{则 } \begin{cases} -4<a+1<4 \\ -4<a^2-1<4, \\ a+1<a^2-1 \end{cases} \text{ 解得 } -\sqrt{5}<a<-1 \text{ 或 } 2<a<\sqrt{5},$$

即实数 a 的取值范围是 $(-\sqrt{5}, -1) \cup (2, \sqrt{5})$.

故选：C

14. B

【分析】根据线面平行，线面垂直，线面垂直，面面垂直相关判定性质逐个判定即可.

【详解】对于 A 选项：若 $l \perp n$ ， $m \perp n$ ，则 l 与 m 可能平行、相交或异面. 像墙角三条线，所以不能得出平行，A 错.

对于 B 选项： $l \parallel \beta$ ，则 β 内有直线 a 与 l 平行，又 $l \perp \alpha$ ，所以 $a \perp \alpha$ ， a 在 β 内，能推出 $\alpha \perp \beta$ ，B 对.

对于 C 选项： $l \parallel \alpha$ 且 $l \perp m$ 时， m 与 α 位置不确定， m 可在 α 内等，不能得出 $m \perp \alpha$ ，C 错.

对于 D 选项： $\alpha \perp \beta$ ，交线为 m ， $l \perp m$ ，则 l 可以在 β 内，可以与 β 平行，或与 β 相交但不垂直，位置不定，D 错.

故选：B.

15. B

【分析】构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} (x > 0)$ ，求导可得其单调性，即可得到 a 最大，然后由作差法比较 b, c 的大小关系，即可得到结果.

$$\text{【详解】设 } f(x) = \frac{\ln x}{x} (x > 0), \text{ 则 } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

令 $f'(x)=0$ ，即 $1-\ln x=0$ ，解得 $x=e$ ，

当 $x \in (0, e)$ 时， $f'(x) > 0$ ，则函数 $f(x)$ 单调递增，

当 $x \in (e, +\infty)$ 时， $f'(x) < 0$ ，则函数 $f(x)$ 单调递减，

则 $x=e$ 时， $f(x)$ 有极大值，即最大值，

$$\text{又 } a = \frac{1}{e} = \frac{\ln e}{e} = f(e), \quad b = \frac{\ln 3}{3} = f(3), \quad c = \frac{\ln 2}{2} = f(2),$$

所以 $f(2) < f(e), f(3) < f(e)$ ，

$$\text{且 } f(2) - f(3) = \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} = \frac{3\ln 2 - 2\ln 3}{6} = \frac{\ln 8 - \ln 9}{6} < 0,$$

所以 $f(2) < f(3)$ ，

综上可得， $f(2) < f(3) < f(e)$ ，即 $c < b < a$ 。

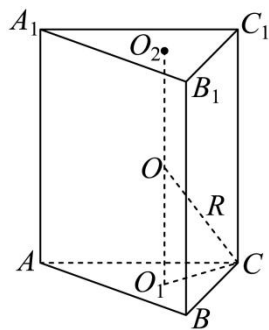
故选：B

16. A

【分析】将三棱锥补成正三棱柱，利用它们有相同的外接球，结合正三棱柱的结构特征求出球半径即可。

【详解】如图，将三棱锥 $S-ABC$ 补成三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ ，点 S 与 A_1 重合，

正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球也为三棱锥 $S-ABC$ 的外接球，令球心为 O ，半径为 R ，



记 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 外接圆的圆心分别为 O_1 和 O_2 ，其半径为 r ，

由正弦定理得： $r = \frac{\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ} = 1$ ，而 O 为 O_1O_2 的中点，则 $R = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ ，

所以该三棱锥的外接球的体积为 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\pi}{3}$ 。

故选：A

17. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}/-\frac{7}{10}\sqrt{2}$

【分析】由同角三角函数的平方关系求得 $\cos \alpha$ ，再根据两角和的余弦公式即可求解.

【详解】因为 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 所以 $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$,

$$\text{则 } \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{7\sqrt{2}}{10},$$

故答案为: $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

18. 60

【分析】由二项式展开式的通项公式写出其通项公式 $T_{k+1} = (-1)^k \times 2^{6-k} \times C_6^k \times x^{18-4k}$, 令

$18-4k=2$ 确定 k 的值, 然后计算 x^2 项的系数即可.

【详解】展开式的通项公式 $T_{k+1} = C_6^k (2x^3)^{6-k} \left(-\frac{1}{x}\right)^k = (-1)^k \times 2^{6-k} \times C_6^k \times x^{18-4k}$,

令 $18-4k=2$ 可得, $k=4$,

则 x^2 项的系数为 $(-1)^4 \times 2^{6-4} \times C_6^4 = 4 \times 15 = 60$.

故答案为: 60.

19. 数学抽象, 逻辑推理

分析: 高中数学学科核心素养包括数学抽象, 逻辑推理, 数学建模, 直观想象, 数学运算与数据分析

20. $(-2, 1)$

【分析】将函数转化为方程, 令 $x^3 - 3x = -(x-1)^2 + a$, 分离参数 a , 构造新函数

$g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 1$, 结合导数求得 $g(x)$ 单调区间, 画出大致图形数形结合即可求解.

【详解】令 $x^3 - 3x = -(x-1)^2 + a$, 即 $a = x^3 + x^2 - 5x + 1$, 令 $g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 1 (x > 0)$,

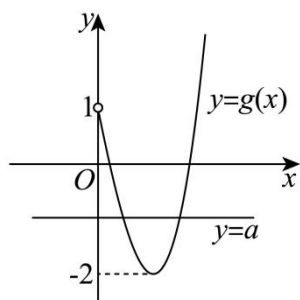
则 $g'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = (3x+5)(x-1)$, 令 $g'(x) = 0 (x > 0)$ 得 $x=1$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, $g(0) = 1, g(1) = -2$,

因为曲线 $y = x^3 - 3x$ 与 $y = -(x-1)^2 + a$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的交点,

所以等价于 $y = a$ 与 $g(x)$ 有两个交点, 所以 $a \in (-2, 1)$.



故答案为: $(-2, 1)$

21. (1) $\frac{2\pi}{3}$

(2) $2\sqrt{7}$

【分析】(1) 由已知及正弦定理可得: $\sin B \cos A + \sin A \cos B = -2 \sin C \cos C$, 化简可得 $\cos C = -\frac{1}{2}$, 从而可求得 C 的值;

(2) 由 $b = 2a$ 及 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$ 可求得 a, b , 从而由余弦定理可解得 c 的值.

【详解】(1) 因为 $b \cos A + a \cos B = -2c \cos C$

所以 $\sin B \cos A + \sin A \cos B = -2 \sin C \cos C$

$$\therefore \sin(B + A) = -2 \sin C \cos C.$$

又 A, B, C 为三角形内角,

$$\therefore B + A = \pi - C,$$

$$\therefore \sin C = -2 \sin C \cos C.$$

$$\because C \in (0, \pi), \therefore \sin C > 0.$$

$$\therefore \cos C = -\frac{1}{2}, \therefore C = \frac{2}{3}\pi.$$

(2) $\because \triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$,

$$\therefore \frac{1}{2} ab \sin C = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore ab = \frac{4\sqrt{3}}{\sin C}.$$

由 (1) 知 $C = \frac{2\pi}{3}$, $\therefore \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore ab = 8$, 又 $\because b = 2a$,

$\therefore a = 2$, $b = 4$,

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 28$,

$\therefore c = 2\sqrt{7}$.

22. (1) $a_n = n$

(2) $\frac{n}{n+1}$.

【分析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d \neq 0)$, 根据等比中项的性质得到方程, 解得 $d = 1$, 即可求出通项公式;

(2) 由 (1) 可得 $\frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 再利用裂项相消法求和即可.

【详解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d \neq 0)$,

因为 a_2, a_4, a_8 成等比数列,

所以 $(a_4)^2 = a_2 \cdot a_8$.

即 $(a_1 + 3d)^2 = (a_1 + d) \cdot (a_1 + 7d)$,

即 $d^2 = a_1 d$ 又 $a_1 = 1$, 且 $d \neq 0$, 解得 $d = 1$

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = n$.

(2) 由 (1) 知: $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

则 $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,

即 $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

23. (1) $a = 0.075$

(2) 16.25

(3) 分布列见解析, $\frac{3}{4}$

【分析】(1) 利用频率分布直方图各个小矩形的面积和为 1, 即可求解;

(2) 利用百分位数的求法, 即可求解;

(3) 根据条件可得 $X \sim B\left(3, \frac{1}{4}\right)$ ，再利用二项分布的概率公式求出 X 可能取值的概率，即可求出分布列，再利用期望的计算公式，即可求解.

【详解】(1) 由 $(0.025 + 0.050 + a + 0.125 + 0.200 + 0.025) \times 2 = 1$ ，解得 $a = 0.075$.

(2) 因为 $(0.025 + 0.050 + 0.075 + 0.125) \times 2 = 0.5$ ， $0.200 \times 2 = 0.400$ ，

所以第 80 百分位数为 $15 + \frac{0.25}{0.4} \times 2 = 16.25$.

(3) 从全校学生中随机选取 1 人，则此人一周参加课后活动的时间在区间 $[13, 15)$ 的概率为 $0.125 \times 2 = 0.25$ ，

又 X 的可能取值为 $0, 1, 2, 3$ ，由题意可得 $X \sim B\left(3, \frac{1}{4}\right)$ ，

$$P(X=0) = C_3^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{27}{64}, P(X=1) = C_3^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}, P(X=3) = C_3^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64},$$

则 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

$$X \text{ 的数学期望 } E(X) = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

24. (1) 证明见解析；

$$(2) \frac{\sqrt{15}}{15}.$$

【分析】(1) 连接 DA_1 ，利用三角形相似得 $AM \perp A_1D$ ，由长方体结构特征及线面垂直的性质得 $CD \perp AM$ ，最后应用线面垂直的判定证明结论；

(2) 构建合适的空间直角坐标系，应用向量法求面面角的余弦值.

【详解】(1) 连接 DA_1 ，根据长方体的结构特征易知 $A_1B_1 \parallel AB \parallel DC$ ，即 A_1, B_1, D, C 四点共面，

所以平面 B_1CD 即为平面 $CD A_1 B_1$ ，

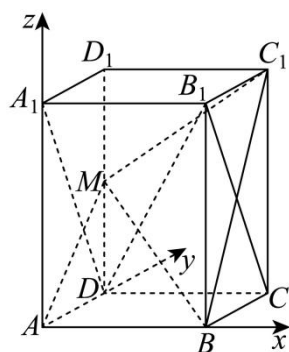
由 M 为棱 DD_1 的中点， $AB=1$ ， $AD=2$ ， $AA_1=2\sqrt{2}$ ，则 $DM=\sqrt{2}$ ，

所以 $\frac{DM}{AD} = \frac{AD}{A_1A}$ ，且 $\angle A_1AD = \angle ADM = 90^\circ$ ，则 $A_1AD \sim ADM$ ，

所以 $\angle DAM + \angle ADA_1 = 90^\circ$ ，则 $AM \perp A_1D$ ，

而 $CD \perp$ 平面 ADD_1A_1 ， $AM \subset$ 平面 ADD_1A_1 ，则 $CD \perp AM$ ，

由 $A_1D \cap CD = D$ 都在平面 ADD_1A_1 内，则 $AM \perp$ 平面 ADD_1A_1 ，即 $AM \perp$ 平面 B_1CD ；



(2) 由题设，可构建如图示的空间直角坐标系 $A-xyz$ ，则 $B(1,0,0), C_1(1,2,2\sqrt{2}), M(0,2,\sqrt{2})$ ，

由 (1) 知平面 B_1CD 的一个法向量为 $\vec{AM} = (0,2,\sqrt{2})$ ，

又 $\vec{BC_1} = (0,2,2\sqrt{2})$ ， $\vec{MC_1} = (1,0,\sqrt{2})$ ，若 $\vec{m} = (x,y,z)$ 是平面 BMC_1 的一个法向量，

所以 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{BC_1} = 2y + 2\sqrt{2}z = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{MC_1} = x + \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$ ，取 $z = -1$ ，则 $\vec{m} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1)$ ，

所以 $\left| \cos \langle \vec{m}, \vec{AM} \rangle \right| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{AM}|}{|\vec{m}| |\vec{AM}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$ ，即所求两个平面夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{15}$ 。

25. (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ；

(2) 证明见解析。

【分析】(1) 根据给定条件，求出 a, b 即可得椭圆 C 的方程。

(2) 当直线 AB 的斜率存在时，设出其方程并与椭圆方程联立，利用韦达定理，结合斜率坐标公式计算推理得证，再验证斜率不存在的情况即可。

【详解】(1) 由椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上顶点为 $M(0,1)$ ，得 $b=1$ ，

由椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，得 $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，解得 $a = \sqrt{2}$ ，

所以椭圆 C 的方程为： $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 。

(2) 当直线 AB 的斜率存在时，设其方程为 $y = k(x+1) - 1, k \neq 2$ ， $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，

$$\text{由 } \begin{cases} y=kx+k-1 \\ x^2+2y^2=2 \end{cases} \text{ 消去 } x \text{ 得: } (2k^2+1)x^2+4k(k-1)x+2(k-1)^2-2=0,$$

$$\Delta=16k^2(k-1)^2-8(2k^2+1)[(k-1)^2-1]=8(k^2+2k)>0, \text{ 解得 } k<-2 \text{ 或 } k>0,$$

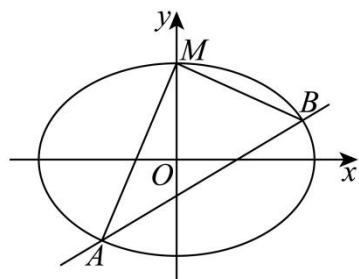
$$x_1+x_2=-\frac{4k^2-4k}{2k^2+1}, x_1x_2=\frac{2k^2-4k}{2k^2+1}, k_1=\frac{y_1-1}{x_1}=k+\frac{k-2}{x_1}, k_2=\frac{y_2-1}{x_2}=k+\frac{k-2}{x_2},$$

$$\text{因此 } k_1+k_2=2k+\frac{k-2}{x_1}+\frac{k-2}{x_2}=2k+(k-2)\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=2,$$

$$\text{当直线 } AB \text{ 斜率不存在时, 由 } \begin{cases} x=-1 \\ x^2+2y^2=2 \end{cases}, \text{ 得 } y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{不妨令 } A(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}), B(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}), \text{ 则 } k_1+k_2=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{0-(-1)}+\frac{1-(-\frac{\sqrt{2}}{2})}{0-(-1)}=2,$$

所以 k_1 与 k_2 的和为定值 2.



26. (1)增区间为 $(0,1)$ 和 $(2,+\infty)$, 减区间为 $(1,2)$, 极大值 -1 , 极小值 $1-3\ln 2$;

(2) $(-\infty, 1-e]$

【分析】(1)将 $a=-2$ 代入函数解析式, 利用导数判断其单调性和极值即可;

(2)问题等价于存在 $x \in (1, +\infty)$, $(a-1) \leq \frac{-x}{\ln x}$, 设 $h(x) = \frac{-x}{\ln x}$, 利用导数求函数 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的最大值, 进而可得出答案.

【详解】(1)若 $a=-2$, 则 $f(x) = -3\ln x + x - \frac{2}{x} (x>0)$,

$$\text{则 } f'(x) = -\frac{3}{x} + 1 + \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2},$$

令 $f'(x) > 0$, 可得 $0 < x < 1$ 或 $x > 2$; 令 $f'(x) < 0$, 可得 $1 < x < 2$,

所以该函数增区间为 $(0,1)$ 和 $(2,+\infty)$, 减区间为 $(1,2)$,

当 $x=1$ 时取得极大值 -1 , 当 $x=2$ 时取得极小值 $1-3\ln 2$;

(2)因为存在 $x \in (1, +\infty)$, 有 $f(x) \leq \frac{a}{x}$ 成立,

所以存在 $x \in (1, +\infty)$, 有 $f(x) - \frac{a}{x} \leq 0$ 成立, 即存在 $x \in (1, +\infty)$, $(a-1)\ln x + x \leq 0$.

因为 $\ln x > 0$, 所以存在 $x \in (1, +\infty)$, $(a-1) \leq \frac{-x}{\ln x}$,

设 $h(x) = \frac{-x}{\ln x}$, 其中 $x \in (1, +\infty)$, 则 $h'(x) = \frac{-\ln x + 1}{(\ln x)^2}$,

因为 $x \in (1, +\infty)$, 所以 $(\ln x)^2 > 0$,

当 $-\ln x + 1 \geq 0$ 时, $h'(x) \geq 0$,

因此 $h(x)$ 在 $(1, e]$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $h(x)_{\max} = h(e) = -e$,

所以 $a-1 \leq -e$, 即 $a \leq 1-e$,

故 a 的取值范围为 $(-\infty, 1-e]$.