

高三数学试题

考试时间：120 分钟 分数：150 分
本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分

第 I 卷（选择题）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. 已知全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $A = \{x | 2^x > 1\}$, $B = \{x | x^2 - 3x - 4 > 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{x | x > 0\}$ B. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 0\}$ C. $\{x | x > 4\}$ D. $\{x | -1 \leq x \leq 4\}$

2. 已知复数 $\frac{2-3i}{1-i}$ (是虚数单位), 它的实部和虚部的和是 ()

- A. 4 B. 6 C. 2 D. 3

3. 二项式 $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式中常数项是 ()

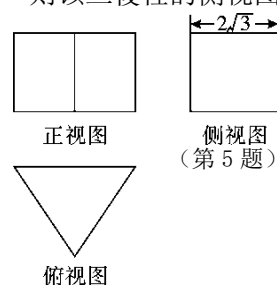
- A. 28 B. -7 C. 7 D. -28

4. “ $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ” 是 “函数 $y = \sin(x + 2\varphi)$ 是偶函数” 的 ()

- A. 充要条件 B. 充分不必要条件 C. 必要不充分条件 D. 既不充分又不必要条件

5. 一个体积为 $12\sqrt{3}$ 的正三棱柱的三视图如图所示, 则该三棱柱的侧视图的面积为 ()

- A. $6\sqrt{3}$
B. 8
C. $8\sqrt{3}$
D. 12

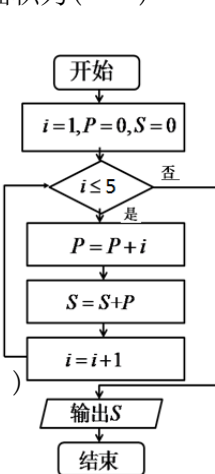


6. 执行如图所示的程序框图, 输出的 S 是 ()

- A. 10 B. 15
C. 20 D. 35

7. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_2 + a_5 + a_8 = 12$, 则 S_9 等于 ()

- A. 18 B. 36 C. 72 D. 无法确定



(第 6 题)

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x^2 - x, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - m$ 有三个不同的零点, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $[-\frac{1}{2}, 1]$ B. $[-\frac{1}{2}, 1)$ C. $(-\frac{1}{4}, 0)$ D. $(-\frac{1}{4}, 0]$

9. 已知直线 $ax + by + c = 0$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相交于 A, B 两点, 且 $|AB| = \sqrt{3}$ 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 的值是 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. 0

10. P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 若 $\overrightarrow{CB} = \lambda \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R}$, 则 P 点一定在 ()

- A. $\triangle ABC$ 内部 B. AC 边所在直线上 C. AB 边所在直线上 D. BC 边所在直线上

11. 定义行列式运算 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$, 将函数 $f(x) = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sin x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix}$ 的图象向左平移 $t (t > 0)$ 个单位, 所得图象对应的函数为偶函数, 则 t 的最小值为 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{5\pi}{6}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

12. 在平面直角坐标系中, 双曲线 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的右焦点为 F , 一条过原点 O 且倾斜角为锐角的直线 l 与

双曲线 C 交于 A, B 两点. 若 $\triangle FAB$ 的面积为 $8\sqrt{3}$, 则直线 l 的斜率为 ()

- A. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{7}$

第 II 卷（非选择题）

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分）

13. 若点 $A(1, 1)$ 在直线 $mx + ny - 2 = 0$ 上, 其中 $mn > 0$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为__.

14. 已知函数 $f(x) = -x^3 + ax$ 在区间 $(-1, 1)$ 上是增函数, 则实数 a 的取值范围是_____.

15. 不等式组 $\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ x+y \geq 0 \\ x-y \geq 0 \end{cases}$ 表示平面区域为 Ω ，在区域 Ω 内任取一点 $P(x,y)$ ，则 P 点的坐标满足不等式 $x^2 + y^2 \leq 2$ 的概率为 _____.

16. 给出以下命题：

- ① 双曲线 $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{2}x$ ；
- ② 命题 P ：“ $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ， $\sin x + \frac{1}{\sin x} \geq 1$ ”是真命题；
- ③ 已知线性回归方程为 $\hat{y} = 3 + 2x$ ，当变量 x 增加 2 个单位，其预报值平均增加 4 个单位；
- ④ 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(0,1)$ ，若 $P(\xi > 1) = 0.2$ ，则 $P(-1 < \xi < 0) = 0.6$ ；
- 则正确命题的序号为 _____。（写出所有正确命题的序号）

三. 解答题（本大题共 6 道题，共 70 分）

17.（12 分）数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = 2S_n + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$)，等差数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_3 = 3, b_5 = 9$

(1) 分别求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $c_n = \frac{b_{n+2}}{a_{n+2}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)，求证 $c_{n+1} < c_n \leq \frac{1}{3}$ 。

18.(12 分) 对某交通要道以往的日车流量（单位：万辆）进行统计，得到如下记录：

日车流量 x	$0 \leq x < 5$	$5 \leq x < 10$	$10 \leq x < 15$	$15 \leq x < 20$	$20 \leq x < 25$	$x \geq 25$
频率	0.05	0.25	0.35	0.25	0.10	0

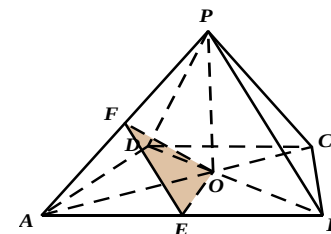
将日车流量落入各组的频率视为概率，并假设每天的车流量相互独立。

- (1) 求在未来连续 3 天里，有连续 2 天的日车流量都不低于 10 万辆且另 1 天的日车流量低于 5 万辆的概率；
- (2) 用 X 表示在未来 3 天时间里日车流量不低于 10 万辆的天数，求 X 的分布列和数学期望。

19.（12 分）已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是等腰梯形， $AB \parallel CD$ ，且 $AC \perp BD$ ，

AC 与 BD 交于 O ， $PO \perp$ 底面 $ABCD$ ， $PO = 2$ ， $AB = 2CD = 2\sqrt{2}$ ， E 、 F 分别是 AB 、 AP 的中点。

- (1) 求证： $AC \perp EF$ ；
- (2) 求二面角 $F-OE-A$ 的余弦值。



20.(12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的两个焦点 F_1, F_2 和上下两个顶点 B_1, B_2 是一个边长为 2 且 $\angle F_1 B_1 F_2$ 为 60° 的菱形的四个顶点。

- (1) 求椭圆 C 的方程；
- (2) 过右焦点 F_2 斜率为 k ($k \neq 0$) 的直线 l 与椭圆 C 相交于 E, F 两点， A 为椭圆的右顶点，直线 AE ， AF 分别交直线 $x = 3$ 于点 M, N ，线段 MN 的中点为 P ，记直线 PF_2 的斜率为 k' 。求证： $k \cdot k'$ 为定值。

21.(12 分) 设 $f(x) = \frac{(x+a)\ln x}{x+1}$ ，曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $2x + y + 1 = 0$ 垂直。

- (1) 求 a 的值；
- (2) 若 $\forall x \in [1, +\infty)$ ， $f(x) \leq m(x-1)$ 恒成立，求 m 的范围。

22. (10 分) 已知动点 P, Q 都在曲线 $C: \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$ (t 为参数) 上，对应参数分别为 $t = \alpha$ 与 $t = 2\alpha$ (0

$< \alpha < 2\pi$)， M 为 PQ 的中点。

- (1) 求 M 的轨迹的参数方程；
- (2) 将 M 到坐标原点的距离 d 表示为 α 的函数，并判断 M 的轨迹是否过坐标原点。