

# 丰台区 2015 年高三年级第二学期统一练习 (一)

## 数学 (理科)

2015.3

### 第一部分 (选择题 共 40 分)

选择题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项.

1. 在复平面内, 复数  $\frac{7+i}{3+4i}$  对应的点的坐标为

A.  $(1, -1)$

B.  $(-1, 1)$

C.  $\left(\frac{17}{25}, -1\right)$

D.  $\left(\frac{17}{5}, -1\right)$

【解析】A;

$$\frac{7+i}{3+4i} = \frac{(7+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{21-28i+3i+4}{9+16} = 1-i$$

2. 在等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_3 + a_4 = 4$ ,  $a_2 = 2$ , 则公比  $q$  等于

A.  $-2$

B.  $1$  或  $-2$

C.  $1$

D.  $1$  或  $2$

【解析】B; 注意容易忽略公比为 1.

3. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的一条渐近线方程是  $y = \sqrt{3}x$ , 它的一个焦点坐标为  $(2, 0)$ ,

则双曲线的方程为

A.  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$

B.  $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$

C.  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

D.  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$

【解析】C;

焦点坐标为  $(2, 0)$ , 所以  $a^2 + b^2 = 2^2 = 4$ , 渐近线方程为  $y = \sqrt{3}x$ , 所以  $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ , 联立两

个方程可得:  $a = 1, b = \sqrt{3}$ ;

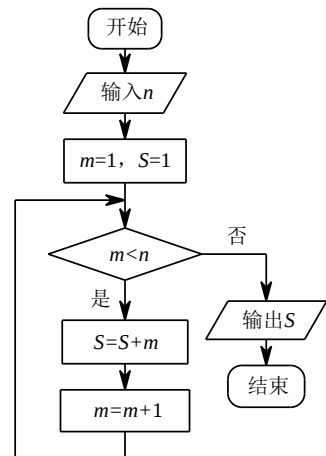
4. 当  $n = 5$  时, 执行如图所示的程序框图, 输出的  $S$  值是

A.  $7$

B.  $10$

C.  $11$

D.  $16$



【解析】C；

5. 在极坐标系中，曲线  $\rho^2 - 6\rho\cos\theta - 2\rho\sin\theta + 6 = 0$  与极轴交于  $A, B$  两点，则  $A, B$  两点间的距离等于

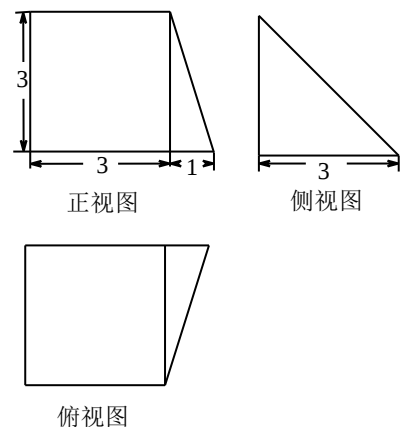
A.  $\sqrt{3}$                       B.  $2\sqrt{3}$                       C.  $2\sqrt{15}$                       D. 4

【解析】B；

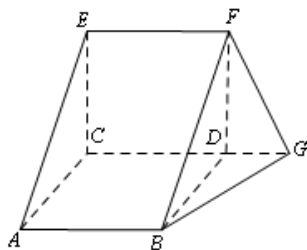
将极坐标化为直角坐标，则曲线为  $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ ，即  $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$ ，所以，是一个圆心为  $(3, 1)$ ，半径为 2 的圆；因为到  $x$  轴的距离为 1，半径为 2，所以  $A, B$  两点间的距离为  $2\sqrt{2^2 - 1^2}$ 。

6. 如图是一个几何体的三视图，则该几何体任意两个顶点间距离的最大值是

A. 4                      B. 5                      C.  $3\sqrt{2}$                       D.  $3\sqrt{3}$



【解析】D；



7. 将函数  $y = \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个长度单位, 再把所得图象上各点的横坐标缩短到原来的一半 (纵坐标不变), 所得图象的函数解析式是

- A.  $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$                       B.  $y = \cos\frac{1}{4}x$   
C.  $y = \cos x$                               D.  $y = \cos\left(\frac{1}{4}x - \frac{\pi}{3}\right)$

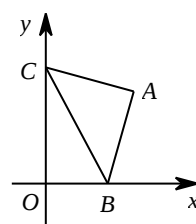
【解析】C;

向左平移则  $x$  变为  $x + \frac{\pi}{3}$ , 函数变为  $y = \cos\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ , 横坐标变为一半时,

则  $x$  变为  $2x$ , 函数变为  $y = \cos x$

8. 如图所示, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 点  $B, C$  分别在  $x$  轴和  $y$  轴非负半轴上, 点  $A$  在第一象限, 且  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $AB = AC = 4$ , 那么  $O, A$  两点间距离的

- A. 最大值是  $4\sqrt{2}$ , 最小值是 4  
B. 最大值是 8, 最小值是 4  
C. 最大值是  $4\sqrt{2}$ , 最小值是 2  
D. 最大值是 8, 最小值是 2



【解析】A;

根据条件可知,  $A, B, C, O$  四点共圆, 且  $BC$  为直径, 所以  $AO$  最大值为该圆的直径  $4\sqrt{2}$ ;

$AO$  的最小值为  $O$  点与  $B$  或  $C$  重合时, 为 4.

## 第二部分 (非选择题 共 110 分)

### 一、填空题 (共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

9. 定积分  $\int_0^{\pi} (x + \cos x) dx =$  \_\_\_\_\_.

【解析】  $\frac{\pi^2}{2}$ ;

$$\int_0^{\pi} (x + \cos x) dx = \frac{1}{2}x^2 - \sin x \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}\pi^2 - \sin \pi - \left( \frac{1}{2} \cdot 0^2 - \sin 0 \right) = \frac{1}{2}\pi^2,$$

10. 已知二项式  $\left(x + \frac{2}{x}\right)^n$  的展开式中各项二项式系数和是 16, 则  $n =$ \_\_\_\_\_, 展开式中的常数项是\_\_\_\_\_.

【解析】 4; 24

11. 若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} y - 4 \leq 0, \\ x + y - 4 \leq 0, \\ x - y \leq 0, \end{cases}$  则  $z = 2x + y$  的最大值是\_\_\_\_\_.

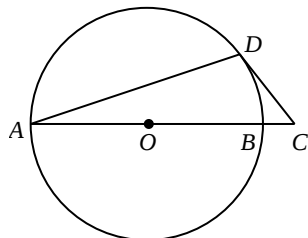
【解析】 6;

12. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x^2 - 2$ , 如果函数

$g(x) = f(x) - m (m \in \mathbf{R})$  恰有 4 个零点, 则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【解析】  $(-1, 0)$ ;

13. 如图,  $AB$  是圆  $O$  的直径,  $CD$  与圆  $O$  相切于点  $D$ ,  $AB = 8$ ,  $BC = 1$ , 则  $CD =$ \_\_\_\_\_;  $AD =$ \_\_\_\_\_.



【解析】 3;  $\frac{12\sqrt{10}}{5}$

连接  $OD$ ,  $OD = 4$ ,  $OC = 5$ ,  $OD$  垂直  $CD$ , 所以  $CD = 3$ , 对  $\angle AOD$  和  $\angle DOC$  用余弦定理联立等式可解  $AD$  的长度.

14. 已知平面上的点集  $A$  及点  $P$ , 在集合  $A$  内任取一点  $Q$ , 线段  $PQ$  长度的最小值称为点  $P$  到集合  $A$  的距离, 记作  $d(P, A)$ . 如果集合  $A = \{(x, y) | x + y = 1 (0 \leq x \leq 1)\}$ , 点  $P$  的坐标为  $(2, 0)$ , 那么

$d(P, A) =$ \_\_\_\_\_; 如果点集  $A$  所表示的图形是边长为 2 的正三角形及其内部, 那么点集

$D = \{P | 0 < d(P, A) \leq 1\}$  所表示的图形的面积为\_\_\_\_\_.

【解析】 1;  $6 + \pi$

二、解答题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

15. (本小题共 13 分)

已知函数  $f(x) = \cos^2 \frac{\omega x}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\omega x}{2} \cos \frac{\omega x}{2} - \frac{1}{2} (\omega > 0)$  的最小正周期为  $\pi$ .

(I) 求  $\omega$  的值及函数  $f(x)$  的最大值和最小值;

(II) 求函数  $f(x)$  的单调递增区间.

【解析】(1)  $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ ,  $\therefore$  最小正周期为  $\pi$

$$\therefore \omega = 2, \text{ 即 } f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

最大值为 1, 最小值为 -1

$$(2) -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$\therefore f(x) \text{ 的单调递增区间为 } \left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$$

16. (本小题共 13 分)

甲、乙两人为了响应政府“节能减排”的号召, 决定各购置一辆纯电动汽车. 经了解目前市场上销售的主流纯电动汽车, 按续驶里程数  $R$  (单位: 公里) 可分为三类车型,  $A: 80 \leq R < 150$ ,  $B: 150 \leq R < 250$ ,  $C: R \geq 250$ . 甲从  $A, B, C$  三类车型中挑选, 乙从  $B, C$  两类车型中挑选, 甲、乙二人选择各类车型的概率如下表:

| 人 \ 车型 | A             | B             | C             |
|--------|---------------|---------------|---------------|
| 甲      | $\frac{1}{5}$ | $p$           | $q$           |
| 乙      |               | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |

如果甲、乙都选  $C$  类车型的概率为  $\frac{3}{10}$ .

(I) 求  $p, q$  的值;

(II) 求甲、乙选择不同车型的概率;

(III) 某市对购买纯电动汽车进行补贴, 补贴标准如下表:

| 车型          | A | B | C |
|-------------|---|---|---|
| 补贴金额 (万元/辆) | 3 | 4 | 5 |

记甲、乙两人购车所获得的财政补贴和为  $X$ , 求  $X$  的分布列.

【解析】设甲选  $A, B, C$  类车型为事件  $A_1, B_1, C_1$ , 乙选  $B, C$  类车型为事件  $B_2, C_2$ ,

(1) 甲乙都选  $C$  类车型为事件  $D$

$$P(D) = P(C_1)P(C_2) = \frac{3}{4}q = \frac{3}{10}, \text{ 所以 } q = \frac{2}{5},$$

$$\text{又 } P(A_1) + P(B_1) + P(C_1) = 1, \text{ 所以 } \frac{1}{5} + p + \frac{2}{5} = 1, \therefore p = \frac{2}{5}$$

(2) 设甲乙选择不同车型为事件  $E$

$$P(E) = 1 - P(B_1)P(B_2) - P(C_1)P(C_2) = 1 - \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} - \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

(3)  $X$  的可取值为 7, 8, 9, 10

$$P(X=7) = P(A_1)P(B_2) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

$$P(X=8) = P(A_1)P(C_2) + P(B_1)P(B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=9) = P(B_1)P(C_2) + P(C_1)P(B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{5}$$

$$P(X=10) = P(C_1)P(C_2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

$X$  的分布列

|     |                |               |               |                |
|-----|----------------|---------------|---------------|----------------|
| $X$ | 7              | 8             | 9             | 10             |
| $P$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{10}$ |

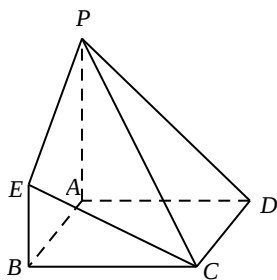
17. (本题共 14 分)

在如图所示的几何体中, 四边形  $ABCD$  为正方形,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PA \parallel BE$ ,  $AB = PA = 4$ ,  $BE = 2$ .

(I) 求证:  $CE \parallel$  平面  $PAD$ ;

(II) 求  $PD$  与平面  $PCE$  所成角的正弦值;

(III) 在棱  $AB$  上是否存在一点  $F$ , 使得平面  $DEF \perp$  平面  $PCE$ ? 如果存在, 求  $\frac{AF}{AB}$  的值; 如果不存在, 说明理由.



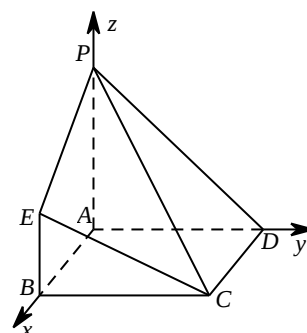
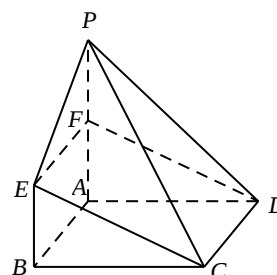
【解析】(1) 取  $PA$  中点  $F$ , 连接  $EF, DF$ ,  
 则四边形  $EFDC$  为平行四边形  
 $\therefore EC \parallel DF$ ,  $DF \subset$  面  $PAD$ ,  $EC \not\subset$  面  $PAD$   
 $\therefore CE \parallel$  平面  $PAD$

(2) 建立如图所示的空间直角坐标系, 则

$$A(0,0,0), B(4,0,0), C(4,4,0), D(0,4,0), P(0,0,4), E(4,0,2)$$

$$\overrightarrow{PE} = (4, 0, -2), \quad \overrightarrow{PC} = (4, 4, -4), \quad \overrightarrow{PD} = (0, 4, -4)$$

设平面  $PCE$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ , 则



$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PE} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 4x - 2z = 0 \\ 4x + 4y - 4z = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} z = 2x \\ y = x \end{cases},$$

令  $x=1$ , 则  $\vec{n}=(1,1,2)$

设  $PD$  与平面  $PCE$  所成的角为  $\alpha$ , 则

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PD}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{PD}|} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

(3) 设  $F(x_0, 0, 0)$ , 则  $\overrightarrow{ED}=(-4, 4, -2)$ ,  $\overrightarrow{EF}=(x_0-4, 0, -2)$

设平面  $DEF$  的法向量为  $\vec{n}_1=(x, y, z)$ , 则

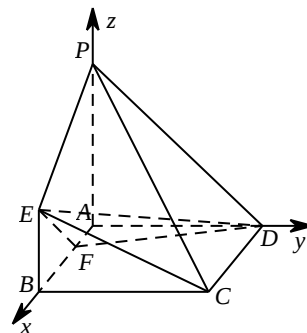
$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{ED} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -4x + 4y - 2z = 0 \\ (x_0 - 4)x - 2z = 0 \end{cases},$$

$$\text{令 } z=2, \text{ 则 } \vec{n}_1 = \left( \frac{4}{x_0-4}, \frac{x_0}{x_0-4}, 2 \right)$$

$\because$  平面  $DEF \perp$  平面  $PCE$

$$\therefore \vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 0, \text{ 即 } \frac{4}{x_0-4} + \frac{x_0}{x_0-4} + 4 = 0, \text{ 即 } x_0 = \frac{12}{5}, \text{ 即 } F\left(\frac{12}{5}, 0, 0\right)$$

$$\therefore \frac{AF}{AB} = \frac{3}{5}$$



18. (本题共 13 分)

设函数  $f(x) = e^x - ax$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

(I) 当  $a=2$  时, 求曲线  $f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;

(II) 在 (I) 的条件下, 求证:  $f(x) > 0$ ;

(III) 当  $a > 1$  时, 求  $f(x)$  在  $[0, a]$  上的最大值.

【解析】(I)  $f(x) = e^x - 2x$ ,  $f'(x) = e^x - 2$ ,  $f'(0) = -1$ , 所以切线方程为  $y = -x + 1$

(II)

|         |                    |         |                    |
|---------|--------------------|---------|--------------------|
| $x$     | $(-\infty, \ln 2)$ | $\ln 2$ | $(\ln 2, +\infty)$ |
| $f'(x)$ | -                  | 0       | +                  |
| $f(x)$  | $\searrow$         | 极小值     | $\nearrow$         |

可以知道当  $x = \ln 2$  是最小值, 所以  $f(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 > 0$ , 因此  $f(x) > 0$

(III)  $f(x) = e^x - ax$ ,  $f'(x) = e^x - a$ ,

令  $e - a = 0$ , 则  $x = \ln a$ , 当  $a > 1$  时,  $\ln a > 0$   
 $\therefore f(x)$  在  $(0, \ln a)$  上单调递减, 在  $(\ln a, +\infty)$  上单调递增

令  $g(a) = a - \ln a (a > 1)$ , 则  $g'(a) = 1 - \frac{1}{a} > 0$ ,

故  $g(a)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增,  $g(a) > g(1) = 1 > 0$ , 故  $a > \ln a$

$\therefore f(x)$  在  $[0, a]$  上的最大值为  $\max\{f(0), f(a)\}$

$$f(0) = 1, f(a) = e^a - a^2$$

$f'(a) = e^a - 2a$ , 当  $a > 1$  时,  $f'(a) > 0$ , 所以  $f(a)$  是单调递增的,  $f(a) > f(1) = e - 1 > 1$

所以最大值为  $e^a - a^2$

19. (本小题共 14 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 右顶点  $A$  是抛物线  $y^2 = 8x$  的焦点, 直线  $l: y = k(x-1)$  与椭圆  $C$  相交于  $P, Q$  两点.

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 如果  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$ , 点  $M$  关于直线  $l$  的对称点  $N$  在  $y$  轴上, 求  $k$  的值.

【解析】(1) 设右顶点  $A(a, 0)$ ,  $A$  是抛物线  $y^2 = 8x$  的焦点, 则  $a = 2$ , 由离心率  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 故  $c = \sqrt{3}$ ,

$b = 1$ . 所以椭圆的方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

(2) 设交点的坐标  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ , 点  $M(x_0, y_0)$ ,

由于点  $M$  与点  $N$  关于直线  $l$  对称且在  $y$  轴上, 故直线  $MN$  的方程为  $y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$

则点  $N$  的坐标为  $(0, y_0 + \frac{x_0}{k})$ . 所以点  $M$  与点  $N$  的中点  $E(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2} + \frac{x_0}{2k})$  在直线  $l$  上

$$\text{即 } \frac{x_0}{2k} + y_0 = k(\frac{x_0}{2} - 1) \quad ①$$

根据  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$ , 得  $(x_0 - 2, y_0) = (x_1 + x_2 - 4, y_1 + y_2)$ ,  $y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) - 2k$

从而①式可得  $\frac{x_1 + x_2 - 2}{k} + k(x_1 + x_2) = 0$

$$\text{即 } (k^2 + 1)(x_1 + x_2) = 2 \quad ②$$

联立方程

$$\begin{cases} y = k(x-1) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 得 } (\frac{1}{4} + k^2)x^2 - 2k^2x + k^2 - 1 = 0$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{2k^2}{\frac{1}{4} + k^2},$$

$$\text{从而②式得 } (k^2 + 1)(\frac{2k^2}{\frac{1}{4} + k^2}) = 2$$

$$\text{解得 } k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

20. (本小题共 13 分)

如果数列  $A: a_1, a_2, \dots, a_m$  ( $m \in \mathbf{Z}$ , 且  $m \geq 3$ ), 满足: ①  $a_i \in \mathbf{Z}$ ,  $-\frac{m}{2} \leq a_i \leq \frac{m}{2}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ); ②  $a_1 + a_2 + \dots + a_m = 1$ , 那么称数列  $A$  为“ $\Omega$ ”数列.

- (1) 已知数列  $M: -2, 1, 3, -1$ ; 数列  $N: 0, 1, 0, -1, 1$ . 试判断数列  $M, N$  是否为“ $\Omega$ ”数列;  
 (2) 是否存在一个等差数列是“ $\Omega$ ”数列? 请证明你的结论;  
 (3) 如果数列  $A$  是“ $\Omega$ ”数列, 求证: 数列  $A$  中必定存在若干项之和为 0.

【解析】(1)  $M$  不是,  $N$  是

(2) 不存在. 用反证法, 假设存在等差数列  $a_1, a_2, \dots, a_m$  是  $\Omega$  数列.

由  $a_1 + a_2 + \dots + a_m = 1$  及  $a_1 + a_2 + \dots + a_m = \frac{m}{2}(a_1 + a_m)$ , 得  $\frac{m}{2}(a_1 + a_m) = 1$ , 即  $a_1 + a_m = \frac{2}{m}$ .

又  $a_1 + a_m \in \mathbf{Z}$ , 则  $\frac{2}{m} \in \mathbf{Z}$ , 但  $m \geq 3$ , 所以  $\frac{2}{m}$  不可能为整数, 矛盾.

因此不存在等差数列是  $\Omega$  数列.

(3) 用反证法. 如果不存在, 则  $a_i \neq 0$ . 我们构造如下的数列  $b_1, b_2, \dots, b_m$  (都是  $A$  中若干项的和), 这些  $b_i$  若有一个为 0, 则命题成立, 假设它们都不为 0.

先任取一个  $b_1 = a_{i_1} < 0$ , 设  $b_1 = a_{i_1}$ , 有  $-\frac{m}{2} \leq b_1 < 0$ ;

当  $b_k < 0$  时, 剩下的  $a_i$  不可能都  $< 0$ , 否则与所有的  $a_i$  之和为 1 矛盾, 取  $a_{i_{k+1}} > 0$ , 令

$b_{k+1} = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_{k+1}}$ , 则  $-\frac{m}{2} \leq b_{k+1} < \frac{m}{2}$ ;

当  $b_k > 0$  时, 剩下的  $a_i$  不可能都  $> 0$ , 否则与所有的  $a_i$  之和为 1 矛盾, 取  $a_{i_{k+1}} < 0$ .

令  $b_{k+1} = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_{k+1}}$ , 则  $-\frac{m}{2} \leq b_{k+1} < \frac{m}{2}$ .

$1 \leq k \leq m-1$ .

构造下去, 直至  $b_m = 1$  为止.

由此我们构造了  $m$  个数,  $b_1, b_2, \dots, b_m$ , 且  $-\frac{m}{2} \leq b_i < \frac{m}{2}$ ,

因为  $b_i \neq 0$ , 且  $-\frac{m}{2} \leq b_i < \frac{m}{2}$ , 所以  $b_1, b_2, \dots, b_m$  中必有两个数相等, 设  $b_s = b_t$  ( $s, t \in \mathbf{N}^*$ ,  $s < t$ ),

则  $b_t - b_s = 0$ , 即  $a_{i_t} + a_{i_{t-1}} + \dots + a_{i_{s+1}} = 0$ , 矛盾.

综上, 必定存在某个  $b_i$  为 0, 这说明  $A$  中存在若干项为 0.