

凉山州 2016 届高中毕业班第三次诊断性检测

数学（理科）参考答案及评分意见

一、选择题

1.C 2.A 3.C 4.C 5.C 6.D 7.D 8.B 9.A 10.A

二、填空题

11. $x > y$ 12. $[0, 6]$ 13. 512 14. $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$ 15. (2) (3) (4)

三、解答题

16. (1) 解:由已知有 $a_1 = 1, d = 2$,4 分

则 $a_n = 2n - 1$ 6 分

(2) $b_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$,10 分

则 $T_n = \frac{n}{2n+1}$ 12 分

17.(1) 设“取出的 3 个小球中含有编号为 4 的小球”为事件 A

$$P(A) = \frac{C_2^1 C_4^2 + C_2^2 C_4^1}{C_6^3} = \frac{4}{5} \quad \text{.....5 分}$$

∴ 取出的三个小球中, 含有编号为 4 的小球的概率为 $\frac{4}{5}$ 6 分

(2) X 可能的取值为 3, 4, 57 分

$$P(X = 3) = \frac{1}{C_6^3} = \frac{1}{20} \quad \text{.....8 分}$$

$$P(X = 4) = \frac{C_2^1 C_3^2 + C_2^2 C_3^1}{C_6^3} = \frac{9}{20} \quad \text{.....9 分}$$

$$P(X = 5) = \frac{C_3^2 + C_2^1 C_3^1 + C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{2} \quad \text{.....10 分}$$

所以随机变量 X 的分布列是

X	3	4	5
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{2}$

.....12 分

18. (1) 设 $AC \cap BD = O$ 以 O 为空间直角坐标系原点, 以 $\overrightarrow{OB}$ 为 x^+ 轴, 以 $\overrightarrow{OC}$ 为 y^+ 轴,

以过 O 点平行于 $\overrightarrow{AE}$ 的射线为 z^+ 轴建立空间直角坐标系 xOy

$\because AB = AE = 1$, 且菱形 $ABCD$ 中 $\angle ABC = 60^\circ$

$\therefore A(0, -\frac{1}{2}, 0), B(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0), C(0, \frac{1}{2}, 0), D(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0), E(0, -\frac{1}{2}, 1)$ 2 分

$\because AE \parallel CF$ 且 $\vec{AE} = (0, 0, 1) \therefore$ 设 $\vec{CF} = (0, 0, \lambda) (\lambda > 0)$

$\therefore F(0, \frac{1}{2}, \lambda)$

又 $\because \vec{AF} \perp \vec{BE}$

$\therefore \vec{AF} \cdot \vec{BE} = -\frac{1}{2} + \lambda = 0, \therefore \lambda = \frac{1}{2} \therefore F(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

.....4 分

又 $\because \vec{AF} \cdot \vec{BD} = (0, 1, \frac{1}{2}) \cdot (-\sqrt{3}, 0, 0) = 0$

$\therefore AF \perp BD$, 又 $AF \perp BE$ 且 $BD \cap BE = B$

$\therefore AF \perp$ 平面 BDE

$\vec{AF} = (1, 0, h), \vec{BE} = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ 6 分

(2) 设 $\vec{m} \perp$ 平面 $BEF, \vec{m} = (x, y, z)$

$\therefore \vec{m} \cdot \vec{BE} = (x, y, z) \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + z = 0$

$\vec{m} \cdot \vec{BF} = (x, y, z) \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0$

$\therefore x = \sqrt{3}y, z = 2y$, 令 $y = 1 \therefore \vec{m} = (\sqrt{3}, 1, 2)$

.....9 分

由 (1) 知 $\vec{AF} \perp$ 平面 BDE , 且 $\vec{AF} = (0, 1, \frac{1}{2})$

设所求二面角为 θ 则有 $|\cos \theta| = \frac{\sqrt{10}}{5}$ 10 分

又因为所求二面角为锐角.....11 分

所以所求二面角得余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$ 12 分

19. (本题满分 12 分)

(1) 因为 $\sin(\frac{\pi}{3} - C) + \cos(C - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\cos C = \frac{1}{2}$, 4 分

因为在 $\triangle ABC$ 中, $0 < C < \pi$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$6 分

(2) 设 CA, CB 的中点分别为 M, N

$\therefore O$ 点满足 $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|, \therefore O$ 为 $\triangle ABC$ 的外心

$$\vec{CO} \cdot (\vec{CA} + \vec{CB}) = \vec{CO} \cdot \vec{CA} + \vec{CO} \cdot \vec{CB} = |\vec{CM}| |\vec{CA}| + |\vec{CN}| |\vec{CB}|$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\sin C} \right)^2 (\sin^2 A + \sin^2 B) = 8 \times \frac{2 - \cos 2A - \cos 2B}{2}$$

$$= 4(2 - 2\cos(A+B)\cos(A-B)) = 4(2 + \cos(A-B)) \quad (*) \quad \text{-----10 分}$$

$$C = \frac{\pi}{3} \Rightarrow A + B = \frac{2\pi}{3}, A - B = \frac{2\pi}{3} - 2B \in \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$$

由 (*): $A = B = \frac{\pi}{3}$ 时, 得最大值 12,

$$\text{则 } 6 < 4(2 + \cos(A-B)) \leq 12$$

故原式的取值范围是 $(6, 12]$ 12 分

20. (12 分) (1) 由题意得, 焦点为椭圆的左焦点, 即 $F(-c, 0)$

设弦与椭圆的交点为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{代入椭圆方程得 } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \cdots \textcircled{1} \quad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{式} - \textcircled{2} \text{式, 得 } -\frac{b^2}{a^2} = \frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1^2 - x_2^2} \cdots \textcircled{3}$$

∵ 点 M 平分弦 AB ，弦经过焦点，

$$\therefore \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{2}{3}, \quad \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}+c},$$

$$\text{代入③式得, } -\frac{b^2}{a^2} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{-\frac{4}{3} \times \left(-\frac{2}{3}+c\right)}, \quad \text{即 } \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{6\left(c-\frac{2}{3}\right)},$$

$$\text{又 } \because \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a^2 - b^2 = c^2, \quad \therefore c^2 = b^2 = \frac{1}{2}a^2, \quad \therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{6\left(c-\frac{2}{3}\right)},$$

$$\text{即 } c=1, \quad a=\sqrt{2}, \quad \therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \quad \cdots 6 \text{ 分}$$

(2) 设点 A 坐标为 (x_1, y_1) ，由对称性，不妨设 $y_1 > 0$ ，由 $\frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 得椭圆上半

$$\text{部分的方程为 } y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}, \quad y' = \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}} \cdot (-x) = \frac{-bx}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}},$$

$$\therefore k_{\text{切}} = \frac{-x_1}{2b\sqrt{1-\frac{x_1^2}{2}}} = \frac{-x_1}{2y_1},$$

$$\therefore N \text{ 点处的切线方程为 } y - y_1 = \frac{-x_1}{2y_1}(x - x_1) \quad \cdots ①$$

$$\text{过 } F \text{ 且垂直于 } FN \text{ 的直线方程为 } y = -\frac{x_1+b}{y_1}(x+b) \quad \cdots ②$$

$$\text{由①②两式, 消去 } y \text{ 得 } y_1 = -\frac{x_1+b}{y_1}(x+b) + \frac{x_1}{2y_1} \cdot (x-x_1) \quad \cdots ③$$

$$\text{其中 } \frac{x_1^2}{2b^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \text{ 代入③式, 可得 } x = -2b = -\sqrt{2}a$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 在定直线 } x = -\sqrt{2}a \text{ 上.} \quad \cdots 13 \text{ 分}$$

21. 解析: (1) $a=1$ 时, $f(x)=\ln x-x(x>0)$, $f'(x)=\frac{1}{x}-1$, 则 $f'(e)=\frac{1}{e}-1$,
 $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(e, 1-e)$ 处的切线方程为 $y-(1-e)=(\frac{1}{e}-1)(x-e)$, 即 $y=(\frac{1}{e}-1)x$.

-----6 分

$$(2) f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{x}-1 & (x>0) \\ -\frac{1}{2\sqrt{-x}} & (x<0) \end{cases} (a>0), \text{ 列表如下}$$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, a)$	a	$(a, +\infty)$
$f'(x)$	-	-	0	-
$f(x)$	减	增	极大值	减

设函数 $f(x)$ 存在“ K 区间”是 $[m, n]$

(1) 当 $m < n \leq 0$ 时, 由上表可知 $\begin{cases} \sqrt{-m}-a=n \\ \sqrt{-n}-a=m \end{cases}$, 两式相减得 $\sqrt{-m}-\sqrt{-n}=n-m$, 即

$\sqrt{-m}-\sqrt{-n}=(\sqrt{-m}-\sqrt{-n})(\sqrt{-m}+\sqrt{-n})$, 所以 $\sqrt{-m}+\sqrt{-n}=1$, 代入 $\begin{cases} \sqrt{-m}-a=n \\ \sqrt{-n}-a=m \end{cases}$, 得

$\begin{cases} a=-n-\sqrt{-n}+1 \\ a=-m-\sqrt{-m}+1 \end{cases}$, 欲使此关于 m, n 的方程组在 $m < n \leq 0$ 时有解, 需使 $y=a$ 与 $y=x^2-x+1(x \geq 0)$ 的

图象有两个交点, $y=x^2-x+1$ 在 $[0, \frac{1}{2})$ 是减函数, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 是增函数, 且 $y_{x=\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$, $y_{x=0}=1$, 所以

此时满足 $f(x)$ 存在“ H 区间”的 a 的取值范围是 $(\frac{3}{4}, 1]$.

(2) 当 $0 < m < n \leq a$ 时, 由上表可知, $\begin{cases} a \ln m - m = m \\ a \ln n - n = n \end{cases}$, 即 $\begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{\ln m}{2m} \\ \frac{1}{a} = \frac{\ln n}{2n} \end{cases}$,

设 $g(x) = \frac{\ln x}{2x}$, $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{2x^2}$, 当 $x \in (0, e)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 为增函数, 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$,

$g(x)$ 为减函数, 欲使关于 m, n 的方程 $\begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{\ln m}{2m} \\ \frac{1}{a} = \frac{\ln n}{2n} \end{cases}$ 有两解, 需 $y = \frac{1}{a}$ 与 $y = \frac{\ln x}{2x}$ 在 $(0, a]$ 有两个交点, 所以有

$$\begin{cases} a > e \\ g(a) \leq \frac{1}{a} < g(e) \end{cases}, \text{解得 } 2e < a \leq e^2.$$

所以此时满足 $f(x)$ 存在“ H 区间”的 a 的取值范围是 $(2e, e^2]$.

-----14 分

(3) 当 $a < m < n$ 时, 由上表可知, $\begin{cases} a \ln m - m = n \\ a \ln n - n = m \end{cases}$, 两式相减得, $a(\ln m - \ln n) = 0$, 此式不可能成立, 所

以此时 $f(x)$ 不存在“ H 区间”.

综上所述, 函数 $f(x)$ 存在“ H 区间”的 a 的取值范围是 $(\frac{3}{4}, 1] \cup (2e, e^2]$.