

茂名市 2010 年第二次高考模拟考试

数学试卷 (理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分, 共 4 页. 满分 150 分. 考试时间 120 分钟.

注意事项:

- 1、答卷前, 考生要务必填写答题卷上的有关项目.
- 2、选择题每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答案填在答题卡相应的位置上.
- 3、非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卷各题目指定区域内的相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新的答案; 不准使用铅笔和涂改液. 不按以上要求作答的答案无效.
- 4、考生必须保持答题卷的整洁. 考试结束后, 将答题卷交回.

5、参考公式: $V_{\text{锥体}} = \frac{1}{3} S_{\text{底}} \cdot h$

第一部分 选择题 (共 40 分)

一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M = \{x | x^2 + 3x - 4 < 0\}$, $N = \{x | 2^{2x-1} > 1\}$, 则 $M \cap N = ()$

- A. $(-4, 1)$ B. $(-4, \frac{1}{2})$ C. $(\frac{1}{2}, 1)$ D. $(1, +\infty)$

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 1, a_2 + a_4 = 10, a_n = 39$, 则 $n = ()$

- A. 19 B. 20 C. 21 D. 22

3. 在平面直角坐标系中, 点 $(-1, a)$ 在直线 $x + y - 3 = 0$ 的右上方, 则 a 的取值范围是 $()$

- A. $(1, 4)$ B. $(-1, 4)$ C. $(-\infty, 4)$ D. $(4, +\infty)$

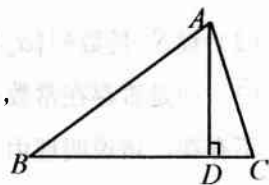
4. 定积分 $\int_0^4 \pi(16 - x^2) dx$ 等于 $()$

- A. 半径为 4 的球的体积 B. 半径为 4 的四分之一球的体积
C. 半径为 4 的半球的体积 D. 半径为 4 的球面积

5. 如右图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC = 4$, $\angle ABC = 30^\circ$, AD 是边 BC 上的高,

则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的值等于 $()$

- A. 0 B. 4 C. 8 D. -4



(第 5 题图)

6. 某银行开发出一套网银验证程序, 验证规则如下: (1) 有两组数字, 这两组数字存在一种对应关系: 第一组数字 a, b, c 对应于第二组数字 $2a+b, c+2b, a+3c$;

(2) 进行验证时程序在电脑屏幕上依次显示第二组数字, 由用户计算出第一组数字后依次输入电脑, 只有准确输入方能进入, 其流程图如图, 试问用户应输入 ()

A. 3, 4, 5

B. 4, 2, 6

C. 2, 6, 4

D. 3, 5, 7



(第6题图)

7. 若圆 O_1 方程为 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$, 圆 O_2 方程为

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$, 则方程 $(x+1)^2 + (y+1)^2 - 4 = (x-3)^2 + (y-2)^2 - 1$ 表示的轨迹是 ()

A. 线段 O_1O_2 的中垂线

B. 过两圆内公切线交点且垂直线段 O_1O_2 的直线

C. 两圆公共弦所在的直线

D. 一条直线且该直线上的点到两圆的切线长相等

8. 设 $f(x) = x^3 + \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 则对任意实数 a, b , $a+b \geq 0$ 是 $f(a) + f(b) \geq 0$ 的 ()

A. 充分必要条件

B. 充分而非必要条件

C. 必要而非充分条件

D. 既非充分也非必要条件

第二部分 非选择题 (共 110 分)

二、填空题: (本大题共 7 小题, 第 14、15 小题任选一题作答, 多选的按第 14 小题给分, 共 30 分)

9. i 为虚数单位, 若复数 z 满足 $f(z+i) = z-3i$, 则 $|f(2i)+1| =$ _____.

10. 已知正实数 x, y 满足 $xy=1$, 则 $(\frac{x}{y}+y)(\frac{y}{x}+x)$ 的最小值为 _____.

11. 关于 x 的方程 $x^2 - \sqrt{2}x - p = 0$ 的解集是 $\{\sin \theta, \cos \theta\}$, 则实数 $p =$ _____.

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + 1, & (x \leq 0) \\ ax - 3, & (x > 0) \end{cases}$ 有 3 个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

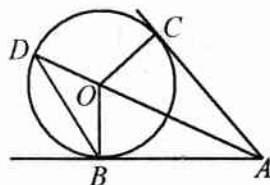
13. 设 $k \in \mathbb{R}$, $A = \{(x, y) | \begin{cases} x-2y+5 \geq 0, \\ 3-x \geq 0, \\ kx+y \geq 0. \end{cases}\}$, $B = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 25\}$, 若 $A \subsetneq B$, 则 k 的取值范围是 _____.

选做题：以下两题任选一道作答，两题都答的按第 14 题正误给分。

14. (极坐标与参数方程选做题) 已知曲线 C 的极坐标方程是 $\rho = 6 \sin \theta$ ，以极点为平面直角坐标系的原点，极轴为 x 轴的正半轴，建立平面直角坐标系，直线 l 的参数方程是

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}t - 1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}), \text{ 则直线 } l \text{ 与曲线 } C \text{ 相交所得的弦的弦长为} \underline{\hspace{2cm}}.$$

15. (几何证明选讲选做题) 如右图所示， AC 和 AB 分别是圆 O 的切线，且 $OC = 3$ ， $AB = 4$ ，延长 AO 到 D 点，则 $\triangle ABD$ 的面积是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



(第 15 题图)

三、解答题：(本大题共 6 小题，共 80 分，解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤)

16. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = 4 \cos x \cdot \sin(x + \frac{\pi}{6}) + a$ 的最大值为 2.

(1) 求 a 的值及 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的单调递增区间.

17. (本小题满分 12 分) 第 16 届亚运会将于 2010 年 11 月 12 日至 27 日在中国广州进行，为了搞好接待工作，组委会招募了 16 名男志愿者和 14 名女志愿者. 调查发现，男、女志愿者中分别有 10 人和 6 人喜爱运动，其余不喜爱.

(1) 根据以上数据完成以下 2×2 列联表:

	喜爱运动	不喜爱运动	总计
男	10		16
女	6		14
总计			30

(2) 根据列联表的独立性检验，能否在犯错误的概率不超过 0.10 的前提下认为性别与喜爱运动有关?

(3) 从女志愿者中抽取 2 人参加接待工作，若其中喜爱运动的人数为 ξ ，求 ξ 的分布列和均值.

参考公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$.

参考数据:

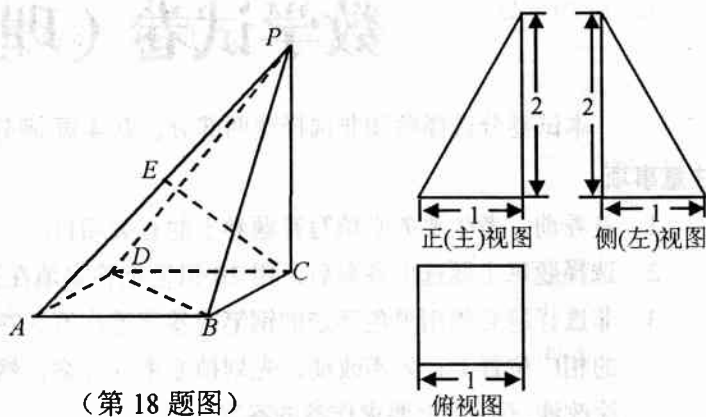
$P(K^2 \geq k_0)$	0.40	0.25	0.10	0.010
k_0	0.708	1.323	2.706	6.635

18. (本小题满分 14 分) 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的三视图如下右图所示, 其中正(主)视图与侧(左)视图为直角三角形, 俯视图为正方形.

(1) 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积;

(2) 若 E 是侧棱 PA 上的动点, 问: 不论点 E 在 PA 的任何位置上, 是否都有 $BD \perp CE$? 请证明你的结论;

(3) 求二面角 $D-PA-B$ 的余弦值.



(第 18 题图)

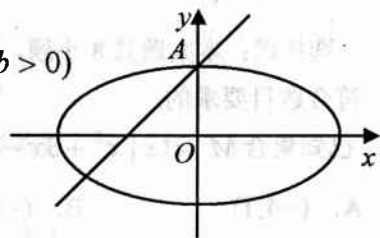
19. (本小题满分 14 分) 已知 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, $f(x) = \ln(x+1) + m - 2f'(1)$, $m \in \mathbb{R}$, 且函数 $f(x)$ 的图象过点 $(0, -2)$.

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的表达式;

(2) 设 $g(x) = \frac{1}{x+1} + af(x)$, ($a \neq 0$), 若 $g(x) > 0$ 在定义域内恒成立, 求实数 a 的取值范围.

20. (本小题满分 14 分) 如图所示, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)

的离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 且 $A(0, 1)$ 是椭圆 C 的顶点.



(第 20 题图)

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 A 作斜率为 1 的直线 l , 在直线 l 上求一点 M , 使得以椭圆 C 的焦点为焦点, 且过点 M 的双曲线 E 的实轴最长, 并求此双曲线 E 的方程.

21. (本小题满分 14 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的相邻两项 a_n, a_{n+1} 是关于 x 的方程 $x^2 - 2^n x + b_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 的两实根, 且 $a_1 = 1$.

(1) 求证: 数列 $\{a_n - \frac{1}{3} \times 2^n\}$ 是等比数列;

(2) 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 求 S_n ;

(3) 问是否存在常数 λ , 使得 $b_n > \lambda S_n$ 对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 都成立, 若存在, 求出 λ 的取值范围, 若不存在, 请说明理由.

数学试题参考答案及评分标准（理科）

一、选择题（每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	D	C	B	A	D	A

提示：

7. $(x+1)^2 + (y+1)^2 - 4$ 可以理解为动点 (x, y) 到圆 O_1 的圆心 $(-1, -1)$ 的距离与圆 O_1 的半径 2 的平方差，同样 $(x-3)^2 + (y-2)^2 - 1$ 可理解为动点 (x, y) 到圆心 $(3, 2)$ 与圆 O_2 半径 1 的平方差，即动点 (x, y) 到两圆的切线长相等，而动点的轨迹为一条直线，所以选 D.

8. $f(x)$ 既是奇函数，又在定义域上是单调递增函数，

$$a+b \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -b \Leftrightarrow f(a) \geq f(-b) \Leftrightarrow f(a) + f(b) \geq 0$$

所以选 A.

二、填空题（每题 5 分，共 30 分）

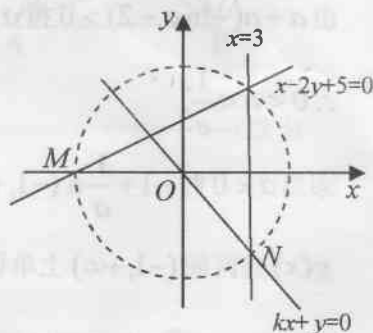
9. $\sqrt{5}$ 10. 4 11. $-\frac{1}{2}$ 12. $0 < a < 1$

13. $(0, \frac{4}{3})$ 14. 4 15. $\frac{48}{5}$

提示：

12. 利用数形结合可知：

$$\begin{cases} a > 0 \\ -\frac{1}{a} < 0 \\ \Delta = 4 - 4a > 0 \end{cases}, \text{解得： } 0 < a < 1.$$



13. 结合图象可知： $k_{ON} < -k < k_{OM}$ ，即 $-\frac{4}{3} < -k < 0$ ， $\therefore 0 < k < \frac{4}{3}$.

15. 过点 D 作 $DE \perp AE$ 交 AB 于点 E，由 $OB \parallel DE$ 得 $\frac{OB}{DE} = \frac{AO}{AD} \Rightarrow DE = \frac{3 \times 8}{5} = \frac{24}{5}$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DE = \frac{48}{5}$$

三、解答题：（本大题共 6 小题，共 80 分，解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤）

$$\begin{aligned}
 16. \text{解: (1) } f(x) &= 4 \cos x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + a = 4 \cos x \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x\right) + a \\
 &= 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 1 + 1 + a = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x + 1 + a \\
 &= 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 + a. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{ 当 } \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) &= 1 \text{ 时, } f(x) \text{ 取得最大值 } 2 + 1 + a = 3 + a. \text{ 又 } f(x) \text{ 的最大值为 } 2, \\
 \therefore 3 + a &= 2, \quad \text{即 } a = -1. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

$$f(x) \text{ 的最小正周期为 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由(1)得 } f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right). \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{得 } -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

$$\therefore -\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore x \in [0, \pi],$$

$$\therefore f(x) \text{ 的单调增区间为 } \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \text{ 和 } \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

17. 解: (1)

	喜爱运动	不喜爱运动	总计
男	10	6	16
女	6	8	14
总计	16	14	30

$\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

(2) 假设：是否喜爱运动与性别无关，由已知数据可求得：

$$K^2 = \frac{30 \times (10 \times 8 - 6 \times 6)^2}{(10+6)(6+8)(10+6)(6+8)} \approx 1.1575 < 2.706$$

因此，在犯错误的概率不超过 0.10 的前提下不能判断喜爱运动与性别有关。 $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(3) 喜爱运动的人数为 ξ 的取值分别为：0, 1, 2，其概率分别为：

$$p(\xi=0)=\frac{C_8^2}{C_{14}^2}=\frac{28}{91}; \quad p(\xi=1)=\frac{C_6^1 C_8^1}{C_{14}^2}=\frac{48}{91}; \quad p(\xi=2)=\frac{C_6^2}{C_{14}^2}=\frac{15}{91} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

喜爱运动的人数为 ξ 的分布列为:

ξ	0	1	2
P	$\frac{28}{91}$	$\frac{48}{91}$	$\frac{15}{91}$

.....10 分

所以喜爱运动的人数 ξ 的均值为: $E\xi=0 \times \frac{28}{91} + 1 \times \frac{48}{91} + 2 \times \frac{15}{91} = \frac{78}{91}$ 12 分

18. 解: (1) 由三视图可知, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 1 的正方形, 侧棱 $PC \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PC=2$.

$$\therefore V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} S_{\text{正方形}ABCD} \cdot PC = \frac{1}{3} \times 1^2 \times 2 = \frac{2}{3}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 不论点 E 在何位置, 都有 $BD \perp AE$5 分

证明: 连结 AC , $\because ABCD$ 是正方形, $\therefore BD \perp AC$,

$\because PC \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $BD \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore BD \perp PC$6 分

又 $\because AC \cap PC = C$, $\therefore BD \perp$ 平面 PAC 7 分

$\therefore$ 不论点 E 在何位置, 都有 $CE \subset$ 平面 PAC .

$\therefore$ 不论点 E 在何位置, 都有 $BD \perp CE$9 分

(3) 在平面 DAP 内过点 D 作 $DF \perp PA$ 于 F , 连结 BF ,

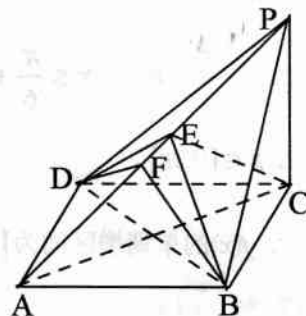
$$\because \angle ABP = \angle ADP = \frac{\pi}{2}, \quad AD=AB=1, \quad DP=BP=\sqrt{5},$$

$$\therefore Rt\triangle ADP \cong Rt\triangle ABP, \quad \therefore \angle PAD = \angle PAB,$$

$$\text{又 } AF=AF, \quad AB=AD,$$

$$\text{从而 } \triangle ADF \cong \triangle ABF, \quad \therefore BF \perp AP.$$

$\therefore \angle DFB$ 为二面角 $D-AP-B$ 的平面角.12 分



$$\text{在 } Rt\triangle ACP \text{ 中, } AP = \sqrt{AC^2 + PC^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{6},$$

$$\text{故在 } Rt\triangle ADP \text{ 中, } DF = \frac{AD \cdot DP}{AP} = \frac{1 \times \sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6} = BF.$$

$$\text{又 } BD = \sqrt{2}, \text{ 在 } \triangle DFB \text{ 中, 由余弦定理得: } \cos \angle BFD = \frac{DF^2 + BF^2 - BD^2}{2 \cdot DF \cdot BF} = -\frac{1}{5}.$$

所以二面角 $D-PA-B$ 的余弦值为 $-\frac{1}{5}$14 分

19. 解: (1) 由已知得 $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, $\therefore f'(1) = \frac{1}{2}$,1 分

又 $f(0) = -2$.

$$\therefore \ln 1 + m - 2 \times \frac{1}{2} = -2 \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore m = -1, \quad \therefore f(x) = \ln(x+1) - 2. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 由 (1) 得 $g(x) = \frac{1}{x+1} + a[\ln(x+1) - 2]$, 定义域为 $(-1, +\infty)$,

$$\therefore g'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{a}{x+1} = \frac{ax+a-1}{(x+1)^2}. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\because a \neq 0$$

$$\text{令 } g'(x) = 0 \text{ 得 } x = \frac{1-a}{a} = -1 + \frac{1}{a}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

① 当 $a > 0$ 时 $-1 + \frac{1}{a} \in (-1, +\infty)$, 且在区间 $(-1 + \frac{1}{a}, +\infty)$ 上 $g'(x) > 0$, 在区间 $(-1, -1 + \frac{1}{a})$ 上 $g'(x) < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $x = -1 + \frac{1}{a}$ 处取得极小值, 也是最小值.

$$\therefore g(x)_{\min} = g(-1 + \frac{1}{a}) = \frac{1}{\frac{1}{a}} + a(\ln \frac{1}{a} - 2) = a + a(-\ln a - 2). \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{由 } a + a(-\ln a - 2) > 0 \text{ 得 } a < \frac{1}{e}.$$

$$\therefore 0 < a < \frac{1}{e}. \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

② 当 $a < 0$ 时 $-1 + \frac{1}{a} \notin (-1, +\infty)$, 在区间 $(-1, +\infty)$ 上, $g'(x) < 0$ 恒成立,

$g(x)$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 上单调递减, 没有最值.13 分

综上得, a 的取值范围是 $0 < a < \frac{1}{e}$14 分

20. 解: (1) 由题意可知, $b = 1$ 1 分

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

即 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - 1}{a^2} = \frac{4}{5}, \therefore a^2 = 5$ 3 分

$\therefore$ 所以椭圆 C 的方程为: $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$4 分

(2) 设椭圆 C 的焦点为 F_1, F_2 , 则可知 $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$,

直线 l 的方程为: $x - y + 1 = 0$ 6 分

因为 M 在双曲线 E 上, 所以要使双曲线 E 的实轴最长, 只需 $\|MF_1\| - \|MF_2\|$ 最大.

又 $\because F_1(-2, 0)$ 关于直线 $l: x - y + 1 = 0$ 的对称点为 $F_1'(-1, -1)$,

则直线 F_2F_1' 与直线 l 的交点即为所求的点 M9 分

$\therefore$ 直线 F_2F_1' 的斜率为 $k = \frac{1}{3}$, 其方程为: $y = \frac{1}{3}(x - 2)$

$\therefore \begin{cases} y = \frac{1}{3}(x - 2) \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}, \therefore M(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$ 12 分

又 $2a' = \|MF_1\| - \|MF_2\| = \|MF_1'\| - \|MF_2\| \leq \|F_2F_1'\| = \sqrt{(2+1)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$\therefore a'_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$, 此时 $b' = \frac{1}{2}\sqrt{6}$,

故所求的双曲线方程为 $\frac{x^2}{\frac{5}{2}} - \frac{y^2}{\frac{3}{2}} = 1$14 分

21. 解: (1) 证明: $\because a_n, a_{n+1}$ 是关于 x 的方程 $x^2 - 2^n \cdot x + b_n = 0$ ($n \in N^*$) 的两实根,

$\therefore \begin{cases} a_n + a_{n+1} = 2^n \\ b_n = a_n \cdot a_{n+1} \end{cases}$ 2 分

$\therefore \frac{a_{n+1} - \frac{1}{3} \times 2^{n+1}}{a_n - \frac{1}{3} \times 2^n} = \frac{2^n - a_n - \frac{1}{3} \times 2^{n+1}}{a_n - \frac{1}{3} \times 2^n} = \frac{-(a_n - \frac{1}{3} \times 2^n)}{a_n - \frac{1}{3} \times 2^n} = -1$.

故数列 $\{a_n - \frac{1}{3} \times 2^n\}$ 是首项为 $a_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, 公比为 -1 的等比数列.4 分

(2) 由 (1) 得 $a_n - \frac{1}{3} \times 2^n = \frac{1}{3} \times (-1)^{n-1}$, 即 $a_n = \frac{1}{3}[2^n - (-1)^n]$.

$$\begin{aligned}\therefore S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{3}(2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - \frac{1}{3}[(-1) + (-1)^2 + \cdots + (-1)^n] \\ &= \frac{1}{3}[2^{n+1} - 2 - \frac{(-1)^n - 1}{2}].\end{aligned}$$

.....8 分

$$(3) \text{ 由 (2) 得 } b_n = a_n \cdot a_{n+1} = \frac{1}{9}[2^n - (-1)^n] \times [2^{n+1} - (-1)^{n+1}] = \frac{1}{9}[2^{2n+1} - (-2)^n - 1]$$

要使 $b_n > \lambda S_n$, 对 $\forall n \in N^*$ 都成立,

$$\text{即 } \frac{1}{9}[2^{2n+1} - (-2)^n - 1] - \frac{\lambda}{3}[2^{n+1} - 2 - \frac{(-1)^n - 1}{2}] > 0, (n \in N^*) \quad (*) \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{① 当 } n \text{ 为正奇数时, 由 } (*) \text{ 式得: } \frac{1}{9}[2^{2n+1} + 2^n - 1] - \frac{\lambda}{3}(2^{n+1} - 1) > 0$$

$$\text{即 } \frac{1}{9}(2^{2n+1} - 1)(2^n + 1) - \frac{\lambda}{3}(2^{n+1} - 1) > 0.$$

$\because 2^{n+1} - 1 > 0, \therefore \lambda < \frac{1}{3}(2^n + 1)$ 对任意正奇数 n 都成立, 故 $\frac{1}{3}(2^n + 1)$ (n 为奇数) 的最小值为 1.

$\therefore \lambda < 1.$ 12 分

$$\text{② 当 } n \text{ 为正偶数时, 由 } (*) \text{ 式得: } \frac{1}{9}[2^{2n+1} - 2^n - 1] - \frac{\lambda}{3}(2^{n+1} - 2) > 0.$$

$$\text{即 } \frac{1}{9}(2^{2n+1} + 1)(2^n - 1) - \frac{2\lambda}{3}(2^n - 1) > 0.$$

$\because 2^n - 1 > 0, \therefore \lambda < \frac{1}{6}(2^{n+1} + 1)$ 对任意正偶数 n 都成立, 故 $\frac{1}{6}(2^{n+1} + 1)$ (n 为偶数) 的最小值

为 $\frac{3}{2}$. $\therefore \lambda < \frac{3}{2}$.

综上所述得, 存在常数 λ , 使得 $b_n > \lambda S_n$ 对 $\forall n \in N^*$ 都成立, λ 的取值范围为 $(-\infty, 1)$.

.....14 分