

2012 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学 (必修加选修 I)

【名师简评】

该套试卷整体上来说与往年相比,比较平稳,试题中没有偏题和怪题,在考查了基础知识的基础上,还考查了同学们灵活运用所学知识的解决问题的能力。题目没有很多汉字的试题,都是比较简约型的。但是不乏也有几道创新试题,像选择题的第 12 题,填空题的 16 题,解答题第 22 题,另外别的试题保持了往年的风格,入题简单,比较好下手,但是出来不是那么容易。整体上试题由梯度,由易到难,而且大部分试题适合同学们来解答体现了双基,考查了同学们的四大思想的运用,是一份比较好的试卷。

一. 选择题

(1) 已知集合 $A=\{x \mid x \text{ 是平行四边形}\}$, $B=\{x \mid x \text{ 是矩形}\}$, $C=\{x \mid x \text{ 是正方形}\}$, $D=\{x \mid x \text{ 是菱形}\}$, 则

- (A) $A \subseteq B$ (B) $C \subseteq B$ (C) $D \subseteq C$ (D) $A \subseteq D$

1. C

【命题意图】本试题主要考查了集合的概念,集合的包含关系的运用。

【解析】因为

由正方形特殊的菱形,矩形是特殊的平行四边形,正方形是特殊的矩形,可知D是最小的集合,A是最大的集合,依次是B,C,集合,因此选C

(2) 函数 $y=\sqrt{x+1}$ ($x \geq -1$) 的反函数为

- (A) $y=x^2-1$ ($x \geq 0$) (B) $y=x^2-1$ ($x \geq 1$)
(C) $y=x^2+1$ ($x \geq 0$) (D) $y=x^2+1$ ($x \geq 1$)

2. A

【命题意图】本试题主要考查了反函数的求解,利用原函数反解 x ,再互换 x,y 得到结论。

【解析】因为

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x+1} \therefore x+1 = y^2 \therefore x = y^2 - 1 \\ \text{互换 } x, y &\text{ 得到 } y = x^2 - 1 \because y = \sqrt{x+1} \geq 0 \\ \therefore y &= x^2 - 1 \text{ 中 } x \geq 0 \end{aligned}$$

(3) 若函数 $f(x) = \sin \frac{x+\varphi}{3}$ ($\varphi \in [0, 2\pi]$) 是偶函数, 则 $\varphi =$

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{3\pi}{2}$ (D) $\frac{5\pi}{3}$

3. C

【命题意图】 本试题主要考查了椭圆的方程以及性质的运用。通过准线方程确定焦点位置，然后借助于焦距和准线求解参数 a, b, c ，从而得到椭圆的方程。

【解析】 因为

$f(x) = \sin \frac{x+\varphi}{3}$ 是偶函数, 则说明了 $f(-x) = f(x)$

即 $\sin \frac{x+\varphi}{3} = \sin \frac{-x+\varphi}{3}$, 展开表达式得到 $\frac{\varphi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\therefore \varphi = 3k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

当 $k=0$ 时, 得到结论。

(4) 已知 α 为第二象限角, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 则 $\sin 2\alpha =$

- (A) $-\frac{24}{25}$ (B) $-\frac{12}{25}$ (C) $\frac{12}{25}$ (D) $\frac{24}{25}$

4. B

【命题意图】 本试题主要考查了同角三角关系式的运用, 以及二倍角公式的运用。

【解析】

$\sin \alpha = \frac{3}{5}$ $\because \alpha$ 是第二象限, 则 $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$

$\therefore \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{12}{25}$

(5) 椭圆的中心在原点, 焦距为 4, 一条准线为 $x=-4$, 则该椭圆的方程为

- (A) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ (B) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$
(C) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ (D) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$

5. C

【命题意图】本试题主要考查了椭圆的方程以及性质的运用。通过准线方程确定焦点位置，然后借助于焦距和准线求解参数 a, b, c ，从而得到椭圆的方程。

【解析】因为

椭圆的一条准线为 $x=-4$, 则 $-\frac{a^2}{c}=-4 \therefore a^2=4c$ 且焦点在 x 轴上,

$\therefore 2c=4 \therefore c=2, a=2\sqrt{2} \therefore$ 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

(6) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1=1, S_n=2a_{n+1}$, 则 $s_n=$

(A) 2^{n+1} (B) $\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$ (C) $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ (D) $\frac{1}{2^{n+1}}$

6 B

【命题意图】本试题主要考查了数列的通项公式和求和的综合运用。

【解析】因为

$$a_1 = 1 \therefore S_n = 2a_{n+1} \therefore a_2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore S_{n-1} = 2a_n, \text{ 两式作差则得到 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{2} (n \geq 2)$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}, n \geq 2 \end{cases}$$

$$\therefore S_n = 1 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

(7) 6 位选手依次演讲，其中选手甲不再第一个也不再最后一个演讲，则不同的演讲次序共有

A 240 种 B 360 种 C 480 种 D 720 种

7 C

【命题意图】本试题主要考查了排列问题的运用。利用特殊元素优先安排的原则分步完成得到结论。

【解析】

甲先安排在其余的4个位置上 C_4^1 , 剩余的元素则进行全排列即可
即为 $A_5^5 \therefore$ 一共有 $C_4^1 A_5^5 = 480$

(8) 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, $CC_1=2\sqrt{2}$, E 为 CC_1 的中点, 则直线 AC_1 与平面 BED 的距离为

(A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 1

8. C

【命题意图】本试题主要考查了正四棱柱的性质的运用, 以及点到面的距离的求解。体现了转换与化归的思想的运用, 以及线面平行时的距离, 转化为点到面的距离即可。

【解析】因为底面的边长为 2, 高为 $2\sqrt{2}$ 且连接 AC, BD , 得到了交点为 O , 连接 EO , $EO \parallel AC_1$

则点 C_1 到平面 BDE 的距离等于 C 到平面 BDE 的距离, 过点 C 作, $CH \perp OE$, 则, CH 即为所求, 在三角形 OCE 中, 利用等面积法, 可得 $CH = \sqrt{2}$

(9) $\triangle ABC$ 中, AB 边的高为 CD , 若 $\overrightarrow{CB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, $|\mathbf{a}|=1, |\mathbf{b}|=2$, 则 $\overrightarrow{AD} =$
(A) $\frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{1}{3}\mathbf{b}$ (B) $\frac{2}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b}$ (C) $\frac{3}{5}\mathbf{a} - \frac{3}{5}\mathbf{b}$ (D) $\frac{4}{5}\mathbf{a} - \frac{4}{5}\mathbf{b}$

9. D

【命题意图】本试题主要考查了向量的加减法几何意义的运用, 结合运用特殊直角三角形求解点 D 的位置的运用。

【解析】因为

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \therefore \angle ACB = 90^\circ \therefore AB = \sqrt{5}, CD = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore BD = \frac{\sqrt{5}}{5}, AD = \frac{4\sqrt{5}}{5} \therefore AD : BD = 4 : 1$$

$$\vec{CD} = \frac{1}{5}\vec{CA} + \frac{4}{5}\vec{CB} \therefore \vec{AD} = \vec{CD} - \vec{CA} = -\frac{4}{5}\vec{CA} + \frac{4}{5}\vec{CB} = -\frac{4}{5}\mathbf{b} + \frac{4}{5}\mathbf{a}$$

(10) 已知 F_1, F_2 为双曲线 $C: x^2 - y^2 = 2$ 的左、右焦点, 点 p 在 c 上, $|PF_1| = 2|PF_2|$, 则 $\cos \angle F_1PF_2 =$

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{5}$

10. C

【命题意图】本试题主要考查了双曲线的定义的运用和性质的运用, 以及余弦定理的运用。

首先运用定义得到两个焦半径的值, 然后结合三角形中的余弦定理求解即可。

【解析】解: 因为

由题意可知, $a = \sqrt{2} = b \therefore c = 2$

设 $|PF_1| = 2x, |PF_2| = x$

$\therefore |PF_1| - |PF_2| = x = 2\sqrt{2} \therefore |PF_1| = 4\sqrt{2}, |PF_2| = 2\sqrt{2}, |F_1F_2| = 4$

利用余弦定理则 $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{(4\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 4^2}{2 \times 2\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$

(11) 已知 $x = \ln \pi, y = \log_5 2, z = e^{-\frac{1}{2}}$, 则

A $x < y < z$ B $z < x < y$ C $z < y < x$ D $y < z < x$

11 D

【命题意图】本试题主要考查了对数、指数的比较大小的运用。

【解析】

$\because \ln \pi > 1 \therefore \log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5} \therefore \log_2 5 > 2,$

$\therefore z = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \therefore \sqrt{e} < 2 \therefore y < z < x$

(12) 正方形 ABCD 的边长为 1, 点 E 在边 AB 上, 点 F 在边 BC 上, $AE = BF = \frac{1}{3}$, 动点 p 从 E 出发沿直线向 F 运动, 每当碰到正方形的边时反弹, 反弹时反射角等于入射角, 当点 p 第一次碰到 E 时, p 与正方形的边碰撞的次数为

A 8 B 6 C 4 D 3

12. A

【命题意图】本试题主要考查了导数在研究三次函数中的极值的运用。要是函数图像与 x 轴有两个不同的交点, 则需要满足极值中一个为零即可。

【解析】因为三次函数的图像与 x 轴恰有两个公共点, 说明而来极大值或者极小值为零即可

$f'(x) = 3(x+1)(x-1) \therefore$ 当 $x=1, x=-1$ 取得极值,

$\therefore f(1) = 0$ 或 $f(-1) = 0 \therefore c-2=0$, 或 $c+2=0$

二、填空题

(13) $(x + \frac{1}{2x})^8$ 的展开式中 x^2 的系数为_____.

13. 7

【命题意图】本试题主要考查了二项式定理中通项公式的运用。利用二项式系数相等，确定了 n 的值，然后进一步借助于通项公式，分析项的系数。

【解析】根据已知条件可知

$\therefore (x + \frac{1}{2x})^8$ 展开式中的通项公式为

$$T_{r+1} = C_8^r (\frac{1}{2})^r x^{8-2r} \therefore \text{令 } 8-2r=2 \therefore r=3$$

$$\therefore C_8^3 (\frac{1}{2})^3 = 7 \text{ 即为所求。}$$

$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0, \\ x + y - 3 \leq 0, \\ x + 3y - 3 \geq 0, \end{cases}$$

(14) 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0, \\ x + y - 3 \leq 0, \\ x + 3y - 3 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = 3x - y$ 的最小值为_____.

14. -1

【命题意图】本试题考查了线性规划最优解的求解的运用。常规题型，只要正确作图，表示出区域，然后借助于直线平移法得到最值。

【解析】利用不等式组，作出可行域，可知区域表示的为三角形，当目标函数过点 $(3, 0)$ 时，目标函数最大，当目标函数过点 $(0, 1)$ 时最小为 -1

(15) 当函数 $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ ($0 \leq x < 2\pi$) 取得最大值时， $x =$ _____.

15. $\frac{5\pi}{6}$

【命题意图】本试题主要考查了三角函数性质的运用，求解值域问题。首先化为单一三角函数，然后利用定义域求解角的范围，从而结合三角函数图像得到最值点。

【解析】解：因为

$$y = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3})$$

$$\therefore x \in [0, 2\pi) \therefore x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$$

$$\therefore \text{当 } x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \therefore x = \frac{5\pi}{6}, \text{ 函数值最大为 } 2$$

(16) 一直正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E、F 分别为 BB_1 、 CC_1 的中点, 那么一面直线 AE 与 D_1F 所成角的余弦值为_____.

16. $\frac{3}{5}$

【命题意图】本试题考查了正方体中异面直线的所成角的求解的运用。。

【解析】解: 首先根据已知条件, 连接 DF, 然后则角 DFD_1 即为

异面直线所成的角, 设边长为 2, 则可以求解得到

$$\sqrt{5} = DF = D_1F, DD_1 = 2$$

结合余弦定理得到结论。

三、解答题

(17) (本小题满分 10 分) (注意: 在试题卷上作答无效)

$\triangle ABC$ 中, 内角 A、B、C 成等差数列, 其对边 a、b、c 满足 $2b^2 = 3ac$, 求 A。

17

【命题意图】本试题主要考查了解三角形的运用,

【点评】该试题从整体来看保持了往年的解题风格, 依然是通过边角的转换, 结合了三角形的内角和定理的知识, 以及正弦定理和余弦定理, 求解三角形中的角的问题。试题整体上比较稳定, 思路也比较容易想, 先将利用等差数列得到角 B, 然后利用余弦定理求解运算得到

A。

(18) (本小题满分 12 分) (注意: 在试题卷上作答无效)

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, 前 n 项和 $S_n = \frac{n+2}{3} a_n$ 。

(I) 求 a_2, a_3 ;

(II) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

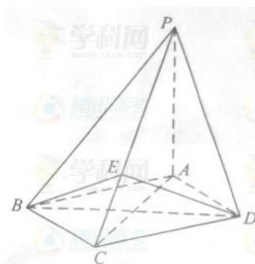
18 【命题意图】本试题主要考查了数列的通项公式与数列求和的相结合的综合运用。

【点评】试题出题比较直接, 没有什么隐含的条件, 只要充分利用通项公式和前 n 项和的关

系式变形就可以得到结论。

(19) (本小题满分 12 分) (注意:在试题卷上作答无效)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AC=2\sqrt{2}$, $PA=2$, E 是 PC 上的一点, $PE=2EC$ 。



- (I) 证明 $PC \perp$ 平面 BED ;
(II) 设二面角 $A-PB-C$ 为 90° , 求 PD 与平面 PBC 所成角的大小

19 【命题意图】 本试题主要是考查了四棱锥中关于线面垂直的证明以及线面角的求解的运用。

从题中的线面垂直以及边长和特殊的菱形入手得到相应的垂直关系和长度, 并加以证明和求解。

【点评】 试题从命题的角度来看, 整体上题目与我们平时练习的试题和相似, 底面也是特殊的菱形, 一个侧面垂直于底面的四棱锥问题, 那么创新的地方就是点 E 的位置的选择是一般的三等分点, 这样的解决对于学生来说就是比较有点难度的, 因此最好使用空间直角坐标系解决该问题为好。

(20) (本小题满分 12 分) (注意: 在试题卷上作答无效)

乒乓球比赛规则规定, 一局比赛, 双方比分在 10 平前, 一方连续发球 2 次后, 对方再连续发球 2 次, 依次轮换, 每次发球, 胜方得 1 分, 负方得 0 分。设在甲、乙的比赛中, 每次发球, 发球 1 分的概率为 0.6, 各次发球的胜负结果相互独立。甲、乙的一局比赛中, 甲先发球。

- (I) 求开球第 4 次发球时, 甲、乙的比分为 1 比 2 的概率;
(II) 求开始第 5 次发球时, 甲得分领先的概率。

20【命题意图】 本试题主要是考查了关于独立事件的概率的求解, 以及分布列和期望值问题。

首先要理解发球的具体情况, 然后对于事件的情况分析, 讨论, 并结合独立事件的概率求解结论。

【点评】 首先从试题的选材上来源于生活, 同学们比较熟悉的背景, 同时建立在该基础上求解进行分类讨论的思想的运用, 以及能结合独立事件的概率公式求解分布列的问题。情景比较亲切, 容易入手, 但是在讨论情况的时候, 容易丢情况。

(21) (本小题满分 12 分) (注意: 在试题卷上作答无效)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 设 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 若过两点 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ 的直线 l 与 x 轴的交点在曲线 $y = f(x)$ 上, 求 a 的值.

21【命题意图】本试题考查了导数在研究函数中的运用。第一就是三次函数，通过求解导数，求解单调区间。另外就是运用极值的概念，求解参数值的运用。

【点评】试题分为两问，题面比较简单，给出的函数比较常规，这一点对于同学们来说没有难度但是解决的关键还是要看导数的符号的实质不变，求解单调区间。第二问中，运用极值的问题，和直线方程的知识求解交点，得到参数的值。

(22) (本小题满分 12 分) (注意: 在试题卷上作答无效)

已知抛物线 $C: y = (x+1)^2$ 与圆 $M: (x-1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = r^2 (r > 0)$ 有一个公共点 A , 且在 A 处两曲线的切线与同一直线 l .

(I) 求 r ;

(II) 设 m, n 是异于 l 且与 C 及 M 都相切的两条直线, m, n 的交点为 D , 求 D 到 l 的距离。

22【命题意图】本试题考查了抛物线与圆的方程，以及两个曲线的公共点处的切线的运用，并在此基础上求解点到直线的距离。

【点评】该试题出题的角度不同于平常，因为涉及的是两个二次曲线的交点问题，并且要研究两曲线在公共点出的切线，把解析几何和导数的工具性结合起来，是该试题的创新处。另外对于在第二问中更是难度加大了，出现了另外的两条公共的切线，这样的问题对于我们以后的学习也是一个需要练习的方向。