

2015—2016 学年度高二级第一学期期末试题 (卷)

数学(理科)

说明：本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的学校、姓名、班级、准考证号填写在答题卡相应位置上。考生务必选择对应的题目作答，否则不判分。

第 I 卷

一、选择题. (每小题 5 分, 共 60 分)

1. 设集合 $M = \{-1, 0, 1\}$, $N = \{x | x^2 - 2x \leq 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{-1, 0\}$

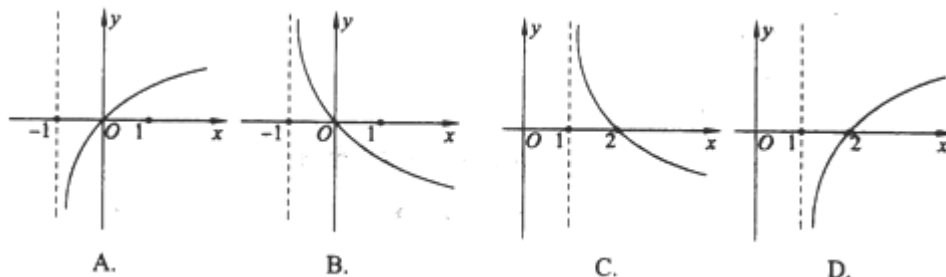
2. 已知 $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, 则 $\cos(\pi - 2\alpha) =$ ()

- A. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C. $-\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{9}$

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $3(a_3 + a_5) + 2(a_7 + a_{10} + a_{13}) = 24$, 则此数列前 13 项之和为 ()

- A. 126 B. 26 C. 13 D. 12

4. 若 $\log_a 2 < 0$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 则函数 $f(x) = \log_a(x+1)$ 的图像大致是 ()



5. 以下有关命题的说法错误的是 ()

- A. 命题“若 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 则 $x=1$ ”的逆否命题为“若 $x \neq 1$, 则 $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ ”
B. “ $x=1$ ”是“ $x^2 - 3x + 2 = 0$ ”的充分不必要条件
C. 若 $p \wedge q$ 为假命题, 则 p 、 q 均为假命题

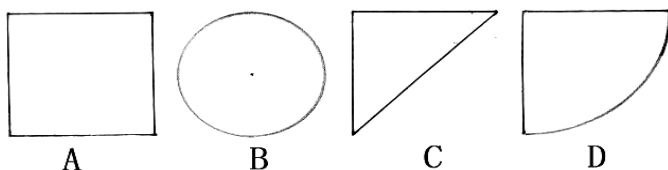
D. 对于命题 $p: \exists x \in R$ 使得 $x^2 + x + 1 < 0$, 则 $\neg p: \forall x \in R$, 均有 $x^2 + x + 1 \geq 0$

6. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leq 2x \\ x + 2y \leq 2 \\ x \leq 2 \end{cases}$, 则 $z = 2x + y$ 的最大值为 ()

- A. 8 B. 6 C. 4 D. $\frac{8}{5}$

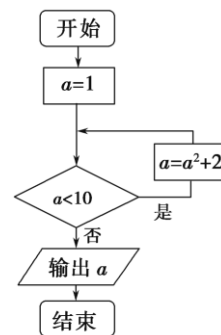
7. 某几何体的正视图与侧视图都是边长为 1 的正方形, 且体积为 $\frac{1}{2}$, 则该几何体的俯视图可

以是 ()



8. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的结果是 ()

- A. 3 B. 11 C. 38 D. 123



9. 过双曲线的一个焦点 F_2 作垂直于实轴的弦 PQ , F_1 是另一焦点, 若 $\angle PF_1Q = \frac{\pi}{2}$, 则双曲

线的离心率 e 等于 ()

- A. $\sqrt{2} - 1$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2} + 1$ D. $\sqrt{2} + 2$

10. 已知点 $p(a, b)$ 在直线 $x + y - 2 = 0$ 上运动, 则 $3^a + 3^b$ 的最小值是 ()

- A. $2\sqrt[4]{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 6 D. 18

11. 设 ΔABC 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $b\cos C + c\cos B = a\sin A$, 则 ΔABC 的形状为 ()

- A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 不确定

12. 设奇函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 且 $f(1) = 0$, 则不等式 $\frac{f(x) - f(-x)}{x} < 0$ 解集

为 ()

- A. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
C. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ D. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

第 II 卷

二.填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 3x$ 的焦点，过 F 且倾斜角为 30° 的直线交于 C 于 A, B 两点，则 $|AB| =$ _____.

14. 函数 $f(x) = \sin(x + 2\varphi) - 2\sin\varphi \cos(x + \varphi)$ 的最大值为_____.

15. 设双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的右顶点为 A ，右焦点为 F ，过点 F 平行于双曲线的一条渐近线的直线与双曲线交于点 B ，则 $\triangle AFB$ 的面积为_____.

16. 已知 m, n 是不同的直线， α, β 是不重合的平面，给出下列命题：

- ①若 $m \parallel \alpha$ ，则 m 平行于 α 内的无数条直线；
- ②若 $\alpha \parallel \beta$ ， $m \subset \alpha$ ， $n \subset \beta$ ，则 $m \parallel n$ ；
- ③若 $m \perp \alpha$ ， $n \perp \beta$ ， $m \parallel n$ ，则 $\alpha \parallel \beta$ ；
- ④若 $\alpha \parallel \beta$ ， $m \subset \alpha$ ，则 $m \parallel \beta$ ；
- ⑤若 $\alpha \perp \beta$ ， $\alpha \cap \beta = m$ ， n 经过 α 内的一点， $n \perp m$ ，则 $n \perp \beta$.

其中正确的命题编号是_____.

三.解答题（解答应写出文字说明，证明过程和演算步骤，本大题共 6 小题，共 70 分）

17. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \log_4(2x + 3 - x^2)$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的定义域及单调区间；
- (2) 求函数 $f(x)$ 的最大值及取得最大值的 x 值.

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ， $C = \frac{\pi}{3}$ ， $b = 5$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$ 。

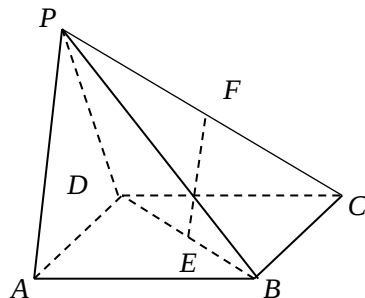
- (1) 求 a, c 的值；
- (2) 求 $\sin(A + \frac{\pi}{6})$ 的值

19.(本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$ ，若 F, E 分别为 PC, BD 的中点，

求证：(1) $EF \parallel$ 平面 PAD ；

(2) 平面 $PDC \perp$ 平面 PAD



20.(本小题满分 12 分)

为了了解甲、乙两名同学的数学学习情况，对他们的 7 次数学测试成绩（满分 100 分）进行统计，作出如下的茎叶图，其中 x, y 处的数字模糊不清. 已知甲同学成绩的中位数是 83，乙同学成绩的平均分是 86 分.

(1) 求 x 和 y 的值；

(2) 现从成绩在 $[90, 100]$ 之间的试卷中随机抽取两份，

求这两份试卷来自甲、乙两人的概率。

甲				乙		
6	3		7	8		
7	x	1	8	3	3	y
2	3		9	0	1	6

21.(本小题满分 12 分)

已知中心在原点的椭圆 C 的右焦点为 $(\sqrt{3}, 0)$ ，离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 设过椭圆左顶点 A 的直线 l 交椭圆于另一点 B ，且 AB 中点横坐标为 $-\frac{8}{5}$ ，求 l 的方程。

22.(本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = 2a_n + 3$ ，数列 $\{b_n\}$ 中， $b_1 = 1$ ，且点 (b_{n+1}, b_n) 在直线 $y = x - 1$

上.(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(3) 若 $c_n = a_n + 3$ ，求数列 $\{b_n c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

2015-2016 学年第一学期期末考试试题

高二数学(理科答案)

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	B	B	C	D	C	B	C	C	B	D

二、填空题

13. $6\sqrt{5}$ 14. 1 15. $\frac{32}{5}$, 16. ①③④

三、解答题

17. 解: (1) $\Theta 2x+3-x^2 > 0$

$\therefore -1 < x < 3$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 3)$.

(2) 令 $t = 2x + 3 - x^2$, 则函数 t 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增.

$\because y = \log_4 t$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, 3)$ 上单调递减.

函数的单调增区间 $(-1, 1)$, 单调减区间是 $(1, 3)$.

(3) 将原函数分解为 $y = \log_4 u$, $u = 2x + 3 - x^2$ 两个函数.

因为 $u = 2x + 3 - x^2 = -(x-1)^2 + 4 \leq 4$,

所以 $y = \log_4 (2x + 3 - x^2) \leq \log_4 4 = 1$.

所以当 $x=1$ 时, u 取得最大值 4,

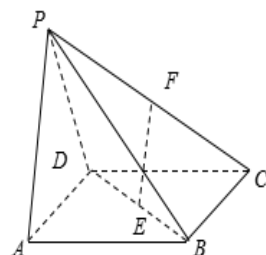
又 $y = \log_4 u$ 为单调增函数, 所以 y 的最大值为 $y = \log_4 4 = 1$, 此时 $x=1$.

18. 解: (I) $Q S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = 10\sqrt{3}$

$\therefore a \times 5 \times \sin \frac{\pi}{3} = 20\sqrt{3}$, 得 $a = 8$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$
 $= \sqrt{8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \frac{1}{2}} = 7$

(II) $Q \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, $\therefore \sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{7} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$



$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 5 \times 7} = \frac{1}{7}$$

$$\sin(A + \frac{\pi}{6}) = \sin A \cos \frac{\pi}{6} + \cos A \sin \frac{\pi}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{13}{14}$$

19①. 略

② $CD \perp$ 平面 PAD

20. 解: (1) $\because$ 甲同学成绩的中位数是 83,

$\therefore x = 3$, $\because$ 乙同学的平均分是 86 分,

$$\therefore \frac{1}{7}(78 + 83 + 83 + 80 + y + 90 + 91 + 96) = 86, \therefore y = 1.$$

(2) 甲同学成绩在 $[90, 100]$ 之间的试卷有两份, 分别记为 a_1, a_2

乙同学成绩在 $[90, 100]$ 之间的试卷有三份, 分别记为 b_1, b_2, b_3

“从这五份试卷中随机抽取两份试卷”的所有可能结果为:

$(a_1, a_2), (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)$

$(b_1, b_2), (b_1, b_3), (b_2, b_3)$ 共有 10 种情况, 概率为 $\frac{3}{5}$

$$21. (1) Qc = \sqrt{3}, e = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore a = 2 \quad -$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 1$$

$$\therefore \text{椭圆的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad -$$

$$(2) Qa = 2, \therefore A(-2, 0)$$

(方法一)

设 l 的方程为 $y = k(x + 2)$

$$\text{代入 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

$$\text{化简得 } (4k^2 + 1)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 4 = 0 \quad (3)$$

$$\text{设另一交点 } B(x_2, y_2), \text{ 则 } -2 + x_2 = -\frac{16k^2}{4k^2 + 1}$$

$$\text{又Q } \frac{-2 + x_2}{2} = -\frac{8}{5}$$

$$\therefore \frac{16k^2}{4k^2 + 1} = \frac{16}{5}, \quad \therefore k^2 = 1, \quad \therefore k = \pm 1$$

$$\text{当 } k = \pm 1 \text{ 时, 代人 (3) 得 } V = 16^2 - 4 \times 5 \times 12 = 16 > 0$$

$$\therefore l \text{ 的方程为 } y = x + 2 \text{ 或 } y = x - 2。$$

(方法二)

设与椭圆的另一交点坐标为 $B(x_2, y_2)$

$$\text{则 } \frac{-2 + x_2}{2} = -\frac{8}{5}, \quad \therefore x_2 = -\frac{6}{5}$$

$$\text{将 } (-\frac{6}{5}, y_2) \text{ 代入椭圆方程 } \frac{(-\frac{6}{5})^2}{4} + y_2^2 = 1$$

$$\text{解得 } y_2 = \pm \frac{4}{5}$$

$$\therefore B(-\frac{6}{5}, \frac{4}{5}) \text{ 或 } B(-\frac{6}{5}, -\frac{4}{5})$$

$$\therefore l \text{ 的方程为 } y = x + 2 \text{ 或 } y = x - 2。$$

$$22. \text{解: (1) 由 } a_{n+1} = 2a_n + 3 \text{ 得 } a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$$

所以 $\{a_n + 3\}$ 是首项为 $a_1 + 3 = 4$, 公比为 2 的等比数列.

$$\text{所以 } a_n + 3 = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}, \text{ 故 } a_n = 2^{n+1} - 3$$

$$(2) \text{ 因为 } (b_{n+1}, b_n) \text{ 在直线 } y = x - 1 \text{ 上,}$$

所以 $b_n = b_{n+1} - 1$ 即 $b_{n+1} - b_n = 1$ 又 $b_1 = 1$

故数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列,

所以 $b_n = n$

$$(3) \quad c_n = a_n + 3 = 2^{n+1} - 3 + 3 = 2^{n+1} \quad \text{故 } b_n c_n = n \cdot 2^{n+1}$$

$$\text{所以 } S_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \dots + n g^{n+1}$$

$$\text{故 } 2S_n = 1 \times 2^3 + 2 \times 2^4 + \dots + (n-1)g^{n+1} + ng^{n+2}$$

$$\text{相减得 } -S_n = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n+1} - ng^{n+2} = \frac{4(2^n - 1)}{2 - 1} - ng^{n+2} = (1 - n)2^{n+2} - 4$$

$$\text{所以 } S_n = (n-1)g^{n+2} + 4$$