



第2课时 解分式方程

I 夯实基础 · 逐点练 (点拨见 202 页)

随堂导练

知识点1 解分式方程

- 把分式方程 $\frac{2}{x+4} = \frac{1}{x}$ 转化为一元一次方程时, 方程两边需同乘(**D**)
A. x B. $2x$ C. $x+4$ D. $x(x+4)$
- (2015·济宁) 解分式方程 $\frac{2}{x-1} + \frac{x+2}{1-x} = 3$ 时, 去分母后变形正确的为(**D**)
A. $2+(x+2)=3(x-1)$ B. $2-x+2=3(x-1)$
C. $2-(x+2)=3$ D. $2-(x+2)=3(x-1)$
- 已知分式方程 $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1} = \frac{6}{x^2-1}$, 下列说法错误的是(**D**)
A. 方程两边各分式的最简公分母是 $(x-1)(x+1)$
B. 方程两边都乘 $(x-1)(x+1)$, 得整式方程 $2(x-1)+3(x+1)=6$
C. 解 B 中的整式方程, 得 $x=1$
D. 原方程的解为 $x=1$
- (2015·常德) 分式方程 $\frac{2}{x-2} + \frac{3x}{2-x} = 1$ 的解为(**A**)
A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{3}$ D. 0
- 下列说法:
①解分式方程一定会产生增根;
②方程 $\frac{x-2}{x^2-4x+4} = 0$ 的根为 $x=2$;
③方程 $\frac{1}{2x} = \frac{1}{2x-4}$ 中各分母的最简公分母为 $2x(2x-4)$;
④ $x + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$ 是分式方程.
其中正确的个数是(**A**)
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

知识点2 分式方程的根(解)

- (2015·遵义) 若 $x=3$ 是分式方程 $\frac{a-2}{x} - \frac{1}{x-2} = 0$ 的根, 则 a 的值是(**A**)
A. 5 B. -5 C. 3 D. -3
- (2015·齐齐哈尔) 关于 x 的分式方程 $\frac{5}{x} = \frac{a}{x-2}$ 有解, 则字母 a 的取值范围是(**D**)
A. $a=5$ 或 $a=0$ B. $a \neq 0$
C. $a \neq 5$ D. $a \neq 5$ 且 $a \neq 0$
- (2015·荆州) 若关于 x 的分式方程 $\frac{m-1}{x-1} = 2$ 的解为非负数, 则 m 的取值范围是(**D**)
A. $m > -1$ B. $m \geq -1$
C. $m > -1$ 且 $m \neq 1$ D. $m \geq -1$ 且 $m \neq 1$

- (创新题) 关于 x 的分式方程 $\frac{a}{x+3} = 1$, 下列说法正确的是(**D**)
A. 方程的解是 $x=a-3$
B. 当 $a>3$ 时, 方程的解是正数
C. 当 $a<3$ 时, 方程的解是负数
D. 以上答案都正确

知识点3 分式方程的增根

- 下列关于分式方程增根的说法正确的是(**D**)
A. 使所有的分母的值都为零的解是增根
B. 分式方程的解为 0 就是增根
C. 使分子的值为 0 的解就是增根
D. 使最简公分母的值为 0 的解是增根
- (2015·营口) 若关于 x 的分式方程 $\frac{2}{x-3} + \frac{x+m}{3-x} = 2$ 有增根, 则 m 的值是(**A**)
A. $m=-1$ B. $m=0$
C. $m=3$ D. $m=0$ 或 $m=3$
- 若关于 x 的分式方程 $\frac{6}{(x+1)(x-1)} = \frac{m}{x-1}$ 有增根, 则它的增根是(**B**)
A. 0 B. 1 C. -1 D. 1 和 -1
- 若关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x+1} = \frac{m}{x+1}$ 无解, 则 m 的值为(**C**)
A. 1 B. 0 C. -1 D. -2
- (2015·龙东) 关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} = 0$ 无解, 则 $m =$ **0 或 -4**.

易错点1 解分式方程后, 忽略根的检验, 未舍去增根

- 解方程: $\frac{8}{x^2-4} + 1 = \frac{x}{x-2}$.

解: 原方程可化为 $\frac{8}{(x+2)(x-2)} + 1 = \frac{x}{x-2}$.

去分母, 得 $8+(x+2)(x-2)=x(x+2)$. 解得 $x=2$.

检验: 当 $x=2$ 时, $(x+2)(x-2)=0$,

所以 $x=2$ 是原方程的增根, 即原方程无解.

易错点2 讨论分式方程的解时, 不考虑增根

- 当 k 为何值时, 关于 x 的方程 $\frac{x+1}{x-2} - \frac{x}{x+3} = \frac{x+k}{(x-2)(x+3)}$ 的解为负数?
解: 方程两边都乘 $(x-2)(x+3)$, 整理得 $5x=k-3$,
解得 $x = \frac{k-3}{5}$.
因为 $x < 0$, 所以 $\frac{k-3}{5} < 0$. 解得 $k < 3$.
又因为 $x \neq 2$ 且 $x \neq -3$, 即 $\frac{k-3}{5} \neq 2$ 且 $\frac{k-3}{5} \neq -3$, 所以 $k \neq 13$ 且 $k \neq -12$.
综上所述, 当 $k < 3$ 且 $k \neq -12$ 时, 原分式方程的解为负数.



名师点金

1. 整式方程和分式方程的根本区别在于分母中是否含有未知数.
2. 分式方程的增根必须同时满足两个条件:(1)增根使最简公分母为零;(2)增根是分式方程化成的整式方程的根.
3. 分式方程无解包含两种情况:一是转化后的整式方程无解;二是分式方程的根是增根.

II 整合方法 · 提升练 (点拨见 202 页)

课后导练

考查角度 1 利用分式方程的解求字母系数的值

17. 已知方程 $\frac{y}{y^2-9} + \frac{1}{3-y} = \frac{3}{y+3}$ 的解为 k , 求关于 x 的方程 $\frac{x+3}{2} = \frac{x+k}{3} - 1$ 的解.

解: 将方程 $\frac{y}{y^2-9} + \frac{1}{3-y} = \frac{3}{y+3}$ 两边同乘 y^2-9 , 得 $y - (y+3) = 3(y-3)$. 解这个一元一次方程, 得 $y=2$.

经检验, $y=2$ 是原分式方程的解, 所以 $k=2$.

所以 $\frac{x+3}{2} = \frac{x+2}{3} - 1$.

去分母, 得 $3(x+3) = 2(x+2) - 6$.

去括号, 得 $3x+9 = 2x+4-6$.

移项, 得 $3x-2x = 4-6-9$.

合并同类项, 得 $x = -11$.

考查角度 2 利用解分式方程的方法巧解特征分式方程

技巧 1 数形结合法

18. 点 A, B 在数轴上, 它们表示的数分别是 $\frac{x}{x-1}$ 和 $\frac{x^2-6x+9}{3x-x^2}$, 且 A, B 两点关于原点对称, 求 x 的值.

解: 由题意得 $\frac{x}{x-1} + \frac{x^2-6x+9}{3x-x^2} = 0$, 即 $\frac{x}{x-1} - \frac{x-3}{x} = 0$. 解得 $x = \frac{3}{4}$.

经检验, $x = \frac{3}{4}$ 是原方程的根, 则分式方程的解为

$x = \frac{3}{4}$. 所以 x 的值为 $\frac{3}{4}$.

技巧 2 化分式为整数部分与分式部分的和

19. 解方程: $\frac{x+2}{x+1} + \frac{x+8}{x+7} = \frac{x+6}{x+5} + \frac{x+4}{x+3}$.

解: 原方程可化为 $\frac{x+2}{x+1} - \frac{x+4}{x+3} = \frac{x+6}{x+5} - \frac{x+8}{x+7}$.

整理, 得 $(1 + \frac{1}{x+1}) - (1 + \frac{1}{x+3}) = (1 + \frac{1}{x+5}) - (1 + \frac{1}{x+7})$, 即 $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+7}$.

左右两边分别通分, 得 $\frac{(x+3)-(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{(x+7)-(x+5)}{(x+5)(x+7)}$,

即 $\frac{2}{(x+1)(x+3)} = \frac{2}{(x+5)(x+7)}$.

去分母, 得 $(x+1)(x+3) = (x+5)(x+7)$.

解得 $x = -4$.

经检验, $x = -4$ 是原方程的根, 所以原方程的根是 $x = -4$.

技巧 3 换元法

20. 解方程: $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x+2}{x-1} = 0$.

解: 令 $x-1=m$, 则原方程可化为 $\frac{m}{m+3} - \frac{m+3}{m} = 0$,

$\therefore m^2 = (m+3)^2$, $\therefore m = m+3$ 或 $m = -m-3$,

$\therefore m = \frac{-3}{2}$, $\therefore x-1 = -\frac{3}{2}$, 解得 $x = -\frac{1}{2}$.

经检验, $x = -\frac{1}{2}$ 是原分式方程的根.

即原分式方程的根为 $x = -\frac{1}{2}$.

III 探究培优 · 拓展练 (点拨见 202 页)

课后选练

拔尖角度 1 利用分式方程增根的意义求字母系数的值

21. 当 a 为何值时, 关于 x 的方程 $\frac{2}{x-2} + \frac{ax}{x^2-4} = \frac{3}{x+2}$ 会产生增根?

解: 方程两边同时乘 $(x+2)(x-2)$, 得 $2(x+2) + ax = 3(x-2)$.

整理, 得 $(1-a)x = 10$.

若方程产生增根, 则增根为 $x=2$ 或 $x=-2$,

且增根一定是整式方程 $(1-a)x = 10$ 的解.

所以将 $x=2$ 和 $x=-2$ 分别代入整式方程 $(1-a)x = 10$, 可得 $a=-4$ 或 $a=6$.

所以, 当 $a=-4$ 或 $a=6$ 时, 原方程会产生增根.

拔尖角度 2 利用分式方程解的意义解增根、无解问题

22. 已知关于 x 的分式方程 $\frac{x-a}{x-1} - \frac{3}{x} = 1$.

(1) 若方程的增根为 $x=1$, 求 a 的值;

(2) 若方程有增根, 求 a 的值;

(3) 若方程无解, 求 a 的值.

解: (1) 去分母并整理, 得 $(a+2)x = 3$.

因为 $x=1$ 是原方程的增根, 所以 $(a+2) \times 1 = 3$.

解得 $a=1$.