



第4课时 分式的加减——异分母的分式相加减

名师点金

1. 异分母分式加减法的一般步骤:(1)通分,如果分母是多项式,要先分解因式求出最简公分母;(2)进行同分母分式的加减;(3)结果化为最简分式或整式.
2. 进行分式加减运算时应注意:(1)正确地找出各分式的最简公分母;(2)分式的分子或分母的系数为负数时,要把“-”号提到分式本身的前面;(3)分式与整式相加减时,可把整式部分看成分母为1的式子,然后进行异分母分式的加减.

I 夯实基础 · 逐点练 (点拨见 198 页)

随堂导练

知识点1 异分母分式的加减

1. 计算 $\frac{a}{a-b} - \frac{b^2}{a(a-b)}$ 的结果是 (**A**)

- A. $\frac{a+b}{a}$ B. $\frac{a-b}{a}$ C. $\frac{b-a}{a}$ D. $a+b$

2. (2015·山西) 计算 $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} - \frac{b}{a-b}$ 的结果是 (**A**)

- A. $\frac{a}{a-b}$ B. $\frac{b}{a-b}$ C. $\frac{a}{a+b}$ D. $\frac{b}{a+b}$

3. 计算 $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x}$ 的结果是 (**D**)

- A. $\frac{1}{2x}$ B. $\frac{1}{6x}$ C. $\frac{5}{6x}$ D. $\frac{11}{6x}$

4. 计算 $\frac{b}{a} - \frac{a}{b} - \frac{a^2+b^2}{ab}$ 的结果是 (**B**)

- A. $\frac{2a}{b}$ B. $-\frac{2a}{b}$ C. $\frac{2b}{a}$ D. $-\frac{2b}{a}$

5. (2015·杭州) 下列各式的变形中,正确的是 (**A**)

- A. $(-x-y)(-x+y) = x^2 - y^2$
 B. $\frac{1}{x} - x = \frac{1-x}{x}$
 C. $x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 + 1$
 D. $\frac{x}{x^2+x} = \frac{1}{x} + 1$

知识点2 分式加减的应用

6. 已知两个式子: $A = \frac{4}{x^2-4}$, $B = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2-x}$, 其中 $x \neq \pm 2$, 则 A 与 B 的关系是 (**C**)

- A. 相等 B. 互为倒数
 C. 互为相反数 D. A 大于 B

7. (2015·泰安) 计算 $(a + \frac{3a-4}{a-3})(1 - \frac{1}{a-2})$ 的结果是 (**B**)

- A. $a-2$ B. $a+2$ C. $\frac{a-2}{a-3}$ D. $\frac{a-3}{a-2}$

8. (中考·天津) 若 $x = -1$, $y = 2$, 则 $\frac{2x}{x^2-64y^2} -$

$\frac{1}{x-8y}$ 的值等于 (**D**)

- A. $-\frac{1}{17}$ B. $\frac{1}{17}$ C. $\frac{1}{16}$ D. $\frac{1}{15}$

9. 当 $a=1$, $b=0$ 时, $\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-a}$ 的值为 (**C**)

- A. -2 B. 2 C. 1 D. -1

10. 已知 $1 < x < 2$, 则式子 $\frac{x-2}{|x-2|} - \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x|}{x}$ 化简的结果是 (**A**)

- A. -1 B. 1 C. 2 D. 3

11. (2014·泰州) 已知 $a^2 + 3ab + b^2 = 0$ ($a \neq 0, b \neq 0$), 则式子 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 的值等于 **-3**.

12. (中考·内江) 已知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} = 3$, 则式子

$\frac{2a-5ab+4b}{4ab-3a-6b}$ 的值为 **$-\frac{1}{2}$** .

易错点 把解方程中的“去分母”误用到分式运算中

13. 先阅读下面的计算过程,再回答所提出的问题:

$$\frac{x-3}{x^2-1} - \frac{3}{1-x} = \frac{x-3}{(x+1)(x-1)} - \frac{3}{x-1} \quad A$$

$$= \frac{x-3}{(x+1)(x-1)} - \frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)} \quad B$$

$$= x-3-3(x+1) \quad C$$

$$= -2x-6.$$

(1) 上述计算过程中开始出现错误的步骤是 **A**;

(2) 从 B 到 C 是否正确? **不正确** (填“正确”或“不正确”); 若不正确, 请写出正确的计算过程.

解: 正确过程: $\frac{x-3}{x^2-1} - \frac{3}{1-x}$

$$= \frac{x-3}{(x+1)(x-1)} + \frac{3}{x-1}$$

$$= \frac{x-3}{(x+1)(x-1)} + \frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{4x}{(x+1)(x-1)}.$$



II 整合方法 · 提升练 (点拨见 199 页)

课后导练

考查角度 1 利用异分母分式加减法的法则计算

14. 计算: $\frac{1}{a^2-a} - \frac{1}{a-1} + 1$.

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= \frac{1}{a(a-1)} - \frac{a}{a(a-1)} + \frac{a(a-1)}{a(a-1)} = \frac{1-a+a(a-1)}{a(a-1)} \\ &= \frac{a^2-2a+1}{a(a-1)} = \frac{(a-1)^2}{a(a-1)} = \frac{a-1}{a}.\end{aligned}$$

考查角度 2 利用分式的加减求值

15. (2015 · 遂宁) 先化简, 再求值: $\frac{1}{m-2} \div \frac{m+1}{m^2-4} - \frac{m}{m+1}$, 其中 $m = -3$.

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= \frac{1}{m-2} \cdot \frac{(m+2)(m-2)}{m+1} - \frac{m}{m+1} = \frac{m+2}{m+1} - \frac{m}{m+1} \\ &= \frac{m+2-m}{m+1} = \frac{2}{m+1}.\end{aligned}$$

当 $m = -3$ 时, 原式 = $\frac{2}{-3+1} = -1$.

16. 已知 $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 25 = 0$, 求 $\frac{x^2-4y^2}{x^2+4xy+4y^2} - \frac{x}{x+2y}$ 的值.

$$\begin{aligned}\text{解: 因为 } x^2 + y^2 + 8x + 6y + 25 = 0, \text{ 所以 } (x+4)^2 + (y+3)^2 = 0. \text{ 所以 } x = -4, y = -3. \\ \frac{x^2-4y^2}{x^2+4xy+4y^2} - \frac{x}{x+2y} &= \frac{(x+2y)(x-2y)}{(x+2y)^2} - \frac{x}{x+2y} = \frac{x-2y}{x+2y} - \frac{x}{x+2y} = \frac{-2y}{x+2y}.\end{aligned}$$

当 $x = -4, y = -3$ 时, 原式 = $-\frac{3}{5}$.

考查角度 3 利用分式的加减求字母的值 (待定系数法)

17. 已知 $\frac{m}{x-3} - \frac{n}{x+2} = \frac{x+17}{(x-3)(x+2)}$, 求 $m^2 + n^2$ 的值.

$$\begin{aligned}\text{解: 因为 } \frac{m}{x-3} - \frac{n}{x+2} &= \frac{(m-n)x + (2m+3n)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x+17}{(x-3)(x+2)}, \\ \text{所以 } \begin{cases} m-n=1, \\ 2m+3n=17. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m=4, \\ n=3. \end{cases} \text{ 所以 } m^2+n^2 &= 4^2+3^2=25.\end{aligned}$$

考查角度 4 利用分式的加减比较大小 (整体代入法)

18. 已知 a, b 为实数, 且 $ab=1$, 设 $M = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$, $N = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}$, 试确定 M, N 的大小关系.

$$\begin{aligned}\text{解: 方法一: 因为 } ab=1, \text{ 所以 } M &= \frac{a(b+1)+b(a+1)}{(a+1)(b+1)} = \frac{ab+a+ab+b}{ab+a+b+1} = \frac{a+b+2}{a+b+2} = 1, \\ N &= \frac{b+1+a+1}{(a+1)(b+1)} = \frac{a+b+2}{ab+a+b+1} = \frac{a+b+2}{a+b+2} = 1. \text{ 所以 } M=N.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{方法二: 因为 } ab=1, \text{ 所以 } M &= \frac{a}{a+ab} + \frac{b}{b+ab} = \frac{a}{a(b+1)} + \frac{b}{b(a+1)} = \frac{1}{b+1} + \frac{1}{a+1}. \\ \text{又因为 } N &= \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}, \text{ 所以 } M=N.\end{aligned}$$

III 链接中考 · 真题练 (点拨见 199 页)

课后导练

命题角度 1 利用整体代换法求与方程组相关的式子的值 (类比法)

19. (2015 · 珠海) 阅读材料: 善于思考的小军在解方程组 $\begin{cases} 2x+5y=3, \text{ ①} \\ 4x+11y=5 \text{ ②} \end{cases}$ 时, 采用了一种“整体代换”

的解法:

$$\text{解: 将方程②变形: } 4x+10y+y=5,$$

$$\text{即 } 2(2x+5y)+y=5. \text{ ③}$$

$$\text{把方程①代入③得: } 2 \times 3 + y = 5, \therefore y = -1.$$

$$\text{把 } y = -1 \text{ 代入①, 得 } x = 4.$$

$$\therefore \text{ 方程组的解为 } \begin{cases} x=4, \\ y=-1. \end{cases}$$

请你解决以下问题:

(1) 模仿小军的“整体代换”法解方程组 $\begin{cases} 3x-2y=5, \text{ ①} \\ 9x-4y=19; \text{ ②} \end{cases}$

(2) 已知 x, y 满足方程组 $\begin{cases} 3x^2-2xy+12y^2=47, \text{ ①} \\ 2x^2+xy+8y^2=36, \text{ ②} \end{cases}$

(i) 求 x^2+4y^2 的值; (ii) 求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y}$ 的值.

$$\text{解: (1) 将方程②变形, 得 } 3(3x-2y)+2y=19. \text{ ③}$$

$$\text{把方程①代入③得, } 3 \times 5 + 2y = 19, \therefore y = 2.$$

$$\text{把 } y = 2 \text{ 代入方程①得, } x = 3. \therefore \text{ 方程组的解为 } \begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$$

$$(2) \text{ (i) 由方程②得, } 2(x^2+4y^2)+xy=36,$$

$$\therefore xy = 36 - 2(x^2+4y^2). \text{ ③}$$

$$\text{由方程①得, } 3(x^2+4y^2)-2xy=47, \text{ ④}$$

$$\text{把③代入④得, } 3(x^2+4y^2)-2[36-2(x^2+4y^2)]=47.$$

$$\therefore x^2+4y^2=17.$$

$$(ii) \text{ 由 } x^2+4y^2=17 \text{ 及 } xy=36-2(x^2+4y^2) \text{ 得, } xy=2.$$

$$\therefore (x+2y)^2 = x^2+4y^2+4xy = 17+8=25.$$

$$\therefore x+2y = \pm 5. \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = \frac{x+2y}{2xy} = \pm \frac{5}{4}.$$

命题角度 2 利用分式的运算求满足不等式条件的分式的值

20. (2015 · 广州) 已知 $A = \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} - \frac{x}{x-1}$.

(1) 化简 A;

(2) 当 x 满足不等式组 $\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x-3 < 0, \end{cases}$ 且 x 为整数时, 求 A 的值.

$$\begin{aligned}\text{解: (1) } A &= \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} - \frac{x}{x-1} = \\ &= \frac{x+1}{x-1} - \frac{x}{x-1} = \frac{x+1-x}{x-1} = \frac{1}{x-1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \text{ 解不等式组 } \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x-3 < 0 \end{cases} \text{ 得 } 1 \leq x < 3, \therefore x \text{ 为整数, } \therefore x=1 \\ \text{或 } x=2.\end{aligned}$$

$$\text{又 } \because x-1 \neq 0, \therefore x \neq 1, \text{ 即 } x=2. \therefore \text{ 原式} = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2-1} = 1.$$



IV 探究培优·拓展练 (点拨见 199 页)

课后选练

拔尖角度1 利用分式的加减巧化简

技巧1 分组通分

21. 计算: $\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

解: 原式 = $\left(\frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-1}\right) + \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) =$
 $\frac{2(x-1)-2(x+1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{(x+2)-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{-4}{x^2-1} +$
 $\frac{4}{x^2-4} = \frac{-4(x^2-4)+4(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2-4)} = \frac{12}{(x^2-1)(x^2-4)}.$

技巧2 先约分,再通分

22. 计算: $\frac{a^4+a^3b-a^2b^2-ab^3}{a^3b+ab^3+2a^2b^2} - \frac{a^3-ab^2}{a^2b-b^3}.$

解: $\frac{a^4+a^3b-a^2b^2-ab^3}{a^3b+ab^3+2a^2b^2} - \frac{a^3-ab^2}{a^2b-b^3} = \frac{a(a+b)^2(a-b)}{ab(a+b)^2}$
 $-\frac{a(a^2-b^2)}{b(a^2-b^2)} = \frac{a-b}{b} - \frac{a}{b} = \frac{-b}{b} = -1.$

技巧3 逐项通分

23. 计算: $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2}.$

解: $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{1+x}{(1-x)(1+x)} +$
 $\frac{1-x}{(1+x)(1-x)} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} =$
 $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{4}{1-x^4}.$

技巧4 分式分离后通分

24. 计算: $\frac{x+2}{x+1} - \frac{x+3}{x+2} + \frac{x-5}{x-4} - \frac{x-4}{x-3}.$

解: $\frac{x+2}{x+1} - \frac{x+3}{x+2} + \frac{x-5}{x-4} - \frac{x-4}{x-3} = \frac{x+1+1}{x+1} -$
 $\frac{x+2+1}{x+2} + \frac{x-4-1}{x-4} - \frac{x-3-1}{x-3} = \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) - \left(1 +$
 $\frac{1}{x+2}\right) + \left(1 - \frac{1}{x-4}\right) - \left(1 - \frac{1}{x-3}\right)$
 $= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-3}$
 $= \frac{x+2-(x+1)}{(x+1)(x+2)} - \frac{x-3-(x-4)}{(x-4)(x-3)}$
 $= \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x-3)(x-4)}$
 $= \frac{(x-3)(x+2)-(x+1)(x-4)}{(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)}$

$$= \frac{x^2-7x+12-x^2-3x-2}{(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)}$$

$$= \frac{-10x+10}{(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)}.$$

技巧5 利用 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 解题

25. 计算: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \dots -$
 $\frac{1}{(x+2015)(x+2016)}.$

解: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \dots -$
 $\frac{1}{(x+2015)(x+2016)} = \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) - \left(\frac{1}{x+1} -$
 $\frac{1}{x+2}\right) - \dots - \left(\frac{1}{x+2015} - \frac{1}{x+2016}\right) = \frac{1}{x} -$
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \dots - \frac{1}{x+2015} + \frac{1}{x+2016}$
 $= \frac{1}{x+2016}.$

拔尖角度2 利用倒数法巧求分式的值(倒数法)

26. 阅读下面的解题过程:

已知: $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$, 求 $\frac{x^2}{x^4+1}$ 的值.

解: 由 $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$ 知 $x \neq 0$, 所以 $\frac{x^2+1}{x} = 3$, 即 $x + \frac{1}{x} = 3$.

所以 $\frac{x^4+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$. 故

$\frac{x^2}{x^4+1}$ 的值为 $\frac{1}{7}$.

该题的解法叫做“倒数法”, 请你利用“倒数法”解下面的题目:

已知 $\frac{x}{x^2-3x+1} = \frac{1}{5}$, 求 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值.

解: 由 $\frac{x}{x^2-3x+1} = \frac{1}{5}$ 知 $x \neq 0$, 所以 $\frac{x^2-3x+1}{x} = 5$,

即 $x-3 + \frac{1}{x} = 5$. 所以 $x + \frac{1}{x} = 8$. 所以 $\frac{x^4+x^2+1}{x^2} =$

$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1 = 8^2 - 1 = 63$. 所以

$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值为 $\frac{1}{63}$.

教你一招

拆项法化简分式的方法:

(1) 如果分式分母中的两个因式相差 1, 例如 $\frac{1}{x(x+1)}$, 那么逆用分式减法法则拆项, 可表示为: $\frac{1}{x(x+1)} =$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

(2) 将分式化为整式部分与分式部分的和的形式, 再进行化简.