

第4课时 等边三角形——含 30° 角的直角三角形的性质

名师点金

在直角三角形中, 30° 角所对的直角边等于斜边的一半.这个定理将特殊的直角三角形中的角度关系转化为直角三角形中边的等量关系.在一般情况下,遇到 30° 角常用的添加辅助线的方法就是作垂直,构造含 30° 角的直角三角形,解决相关的线段问题.

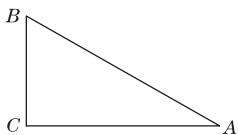
I 夯实基础·逐点练 (点拨见184页)

随堂导练

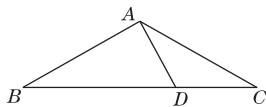
知识点1 含 30° 角的直角三角形的性质

1. 如图,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle A=30^\circ$, $AB+BC=12\text{ cm}$,则 AB 等于(**C**)

A. 6 cm B. 7 cm C. 8 cm D. 9 cm



(第1题)



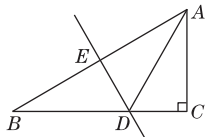
(第2题)

2. 如图,已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle C=30^\circ$, $AB\perp AD$,则下列关系式正确的为(**B**)

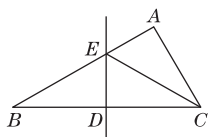
A. $BD=CD$ B. $BD=2CD$
C. $BD=3CD$ D. $BD=4CD$

3. (2015·黄冈) 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle B=30^\circ$,边 AB 的垂直平分线 DE 交 AB 于点 E ,交 BC 于点 D , $CD=3$,则 BC 的长为(**C**)

A. 6 B. $6\sqrt{3}$ C. 9 D. $3\sqrt{3}$



(第3题)



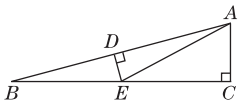
(第4题)

4. (2015·襄阳) 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=30^\circ$, BC 的垂直平分线交 AB 于点 E ,垂足为 D , CE 平分 $\angle ACB$.若 $BE=2$,则 AE 的长为(**B**)

A. $\sqrt{3}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

5. 如图所示,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $\angle B=15^\circ$, DE 垂直平分 AB ,交 BC 于点 E ,垂足为 D , $BE=6\text{ cm}$,则 AC 等于(**D**)

A. 6 cm B. 5 cm C. 4 cm D. 3 cm

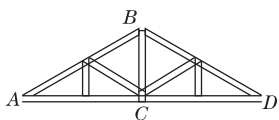


(第5题)

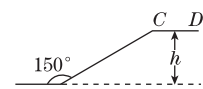
知识点2 含 30° 角的直角三角形性质的应用

6. 如图是屋架设计图的一部分,立柱 BC 垂直于横梁 AD , $AB=8\text{ m}$, $\angle A=30^\circ$,则立柱 BC 的长度为(**A**)

A. 4 m B. 8 m C. 10 m D. 16 m



(第6题)

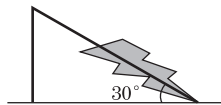


(第7题)

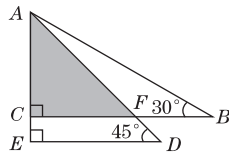
7. 如图是某商场一楼与二楼之间的扶梯示意图,其中 AB 、 CD 分别表示一楼、二楼地面的水平线, $\angle ABC=150^\circ$, BC 的长是 8 m ,则乘电梯从点 B 到点 C 上升的高度 h 是(**B**)

A. 3 m B. 4 m C. 5 m D. 6 m

8. 如图,一棵树在一次强台风中于离地面 4 m 处折断倒下,倒下部分与地面成 30° 夹角,这棵树在折断前的高度为 12 米.



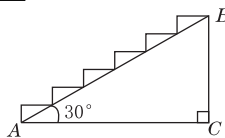
(第8题)



(第9题)

9. 将一副三角尺按如图所示叠放在一起,若 $AB=10\text{ cm}$,则阴影部分的面积是 $\frac{25}{2}$ cm^2 .

10. 如图,已知斜坡 AB 的长度是 5 m ,点 A 与 B 的水平距离是 4.33 m , $\angle BAC=30^\circ$,坡角为 30° 的楼梯表面铺地毯,地毯的长度为多少米?(结果精确到 0.1 m)

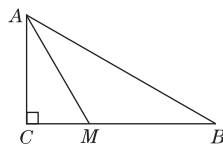


(第10题)

解:由题意得铺设地毯的水平总长等于 AC ,竖直总长等于 BC .由于 $\triangle ABC$ 是直角三角形, $\angle C=90^\circ$, $\angle BAC=30^\circ$,所以 $BC=\frac{1}{2}AB=2.5(\text{m})$,所以地毯的长度为 $AC+BC=4.33+2.5=6.83\approx 6.8(\text{m})$.

易错点 利用含 30° 角的直角三角形的性质时忽视 30° 角“所对”直角边造成错误

11. 如图,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle BAC=60^\circ$, $\angle BAC$ 的平分线 AM 的长为 15 cm ,求 BC 的长.



(第11题)

解: $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle BAC=60^\circ$, $\therefore \angle B=30^\circ$. $\because AM$ 平分 $\angle BAC$, $\therefore \angle CAM=\angle BAM=30^\circ$. $\therefore \angle B=\angle BAM$. $\therefore BM=AM=15\text{ cm}$.
 $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ACM$ 中, $\angle CAM=30^\circ$, $\therefore CM=\frac{1}{2}AM=7.5\text{ cm}$. $\therefore BC=CM+BM=7.5+15=22.5(\text{cm})$.



II

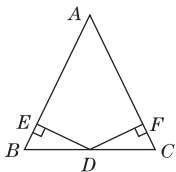
整合方法·提升练

(点拨见 185 页)

课后导练

【考查角度1】 利用含 30° 角的直角三角形的性质求边长

12. 如图: 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, D 为 BC 边的中点, 过点 D 作 $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, 垂足分别为 E, F .



(第 12 题)

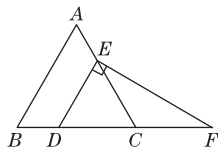
- (1) 求证: $DE=DF$;
(2) 若 $\angle A=60^\circ$, $BE=1$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

(1) 证明: $\because DE \perp AB, DF \perp AC, \therefore \angle BED = \angle CFD = 90^\circ$. $\because AB=AC, \therefore \angle B = \angle C$. $\because D$ 是 BC 的中点, $\therefore BD=CD$. 在 $\triangle BED$ 和 $\triangle CFD$ 中, $\angle BED = \angle CFD, \angle B = \angle C, BD = CD, \therefore \triangle BED \cong \triangle CFD$ (AAS). $\therefore DE=DF$.

(2) 解: $\because AB=AC, \angle A=60^\circ, \therefore \triangle ABC$ 为等边三角形, $\therefore \angle B=60^\circ$. $\because \angle BED=90^\circ, \therefore \angle BDE=30^\circ, \therefore BE=\frac{1}{2}BD$. $\because BE=1, \therefore BD=2, \therefore BC=2BD=4$,

 $\therefore \triangle ABC$ 的周长为 12.**【考查角度2】** 利用等边三角形的判定和性质解与含 30° 角的直角三角形的综合问题

13. 如图, 在等边三角形 ABC 中, 点 D, E 分别在边 BC, AC 上, 且 $DE \parallel AB$, 过点 E 作 $EF \perp DE$, 交 BC 的延长线于点 F .



(第 13 题)

- (1) 求 $\angle F$ 的度数;
(2) 若 $CD=2$, 求 DF 的长.

解: (1) $\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore \angle B=60^\circ$. $\because DE \parallel AB, \therefore \angle EDC = \angle B = 60^\circ$. $\because EF \perp DE, \therefore \angle DEF=90^\circ. \therefore \angle F=90^\circ - \angle EDC=30^\circ$.

(2) $\because \angle ACB=60^\circ, \angle EDC=60^\circ, \therefore \angle DEC=60^\circ, \therefore \triangle EDC$ 是等边三角形, $\therefore ED=DC=2$. $\because \angle DEF=90^\circ, \angle F=30^\circ, \therefore DF=2DE=4$.

III

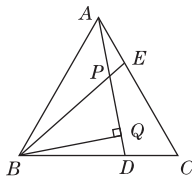
探究培优·拓展练

(点拨见 185 页)

课后选练

【拔尖角度1】 利用含 30° 角的直角三角形的性质解与全等三角形的综合问题(等线段代换法)

14. 如图, $\triangle ABC$ 为等边三角形, $AE=CD$, AD, BE 相交于点 P , $BQ \perp AD$ 于点 Q , $PQ=3, PE=1$.



(第 14 题)

- (1) 求证: $BE=AD$;
(2) 求 AD 的长.

解: (1) 证明: $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle BAE = \angle C = 60^\circ$.

又 $\because AB=AC, AE=CD$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CAD$.

$\therefore \angle CAD = \angle ABE, BE=AD$.

(2) 解: $\because \angle BPD = \angle PAB + \angle ABE = \angle PAB + \angle CAD = \angle BAC = 60^\circ, BQ \perp AD$,

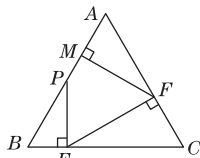
$\therefore \angle PBQ = 30^\circ$.

$\therefore BP = 2PQ = 6$.

$\therefore BE = BP + PE = 6 + 1 = 7. \therefore AD = 7$.

【拔尖角度2】 利用含 30° 角的直角三角形的性质探究动点问题

15. 如图, P 是等边三角形 ABC 边 AB 上任一点, $AB=2$, $PE \perp BC$ 于 $E, EF \perp AC$ 于 $F, FM \perp AB$ 于 M , 设 $BP=x(x>0)$.



(第 15 题)

- (1) 用含 x 的代数式表示 AM ;
(2) 当 x 等于多少时, 点 P 和点 M 重合?

解: (1) $\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore AB=BC=AC=2, \angle B=\angle C=\angle A=60^\circ$. $\because PE \perp BC, EF \perp AC, FM \perp AB, \therefore \angle BEP = \angle EFC = \angle AMF = 90^\circ. \therefore \angle BPE = \angle CEF = \angle AFM = 30^\circ$. $\because BP=x, \therefore BE=\frac{1}{2}x$,

$\therefore EC=BC-BE=2-\frac{1}{2}x, \therefore CF=1-\frac{1}{4}x, \therefore AF=2-(1-\frac{1}{4}x)=1+\frac{1}{4}x, \therefore AM=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}x$.

(2) 当点 P 和点 M 重合时, $BP+AP(M)=AB$, 即 $x+(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}x)=2$, 解得 $x=\frac{4}{3}$, 即当 $x=\frac{4}{3}$ 时, 点 P 和点 M 重合.

教你一招

利用含 30° 角的直角三角形的性质求有关线段的长:

依据: 直角三角形中 30° 角所对的直角边等于斜边的一半.

用途: 求线段长度和证明线段倍分关系.

作法: 当图形中含有 30° 角时, 通过作垂线构造含有 30° 角的直角三角形.