



12.3 角的平分线的性质

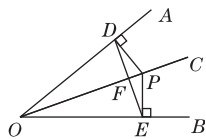
第1课时 角的平分线的性质

名师点金

角的平分线图形结构中的“两种数量关系”：如图， OC 平分 $\angle AOB$ ， $PD \perp OA$ 于 D ， $PE \perp OB$ 于 E ， DE 交 OC 于点 F 。

(1) 角的相等关系：① $\angle AOC = \angle BOC = \angle PDF = \angle PEF$ ；② $\angle ODP = \angle OEP = \angle DFO = \angle EFO = \angle DFP = \angle EFP = 90^\circ$ ；③ $\angle DPO = \angle EPO = \angle ODF = \angle OEF$ 。

(2) 线段的相等关系： $OD = OE$ ， $DP = EP$ ， $DF = EF$ 。



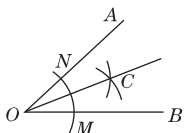
I 夯实基础 · 逐点练 (点拨见 177 页)

随堂导练

知识点1 角的平分线的画法

1. 用直尺和圆规作一个角的平分线的示意图如图所示，则能说明 $\angle AOC = \angle BOC$ 的依据是 (A)

- A. SSS
B. ASA
C. AAS
D. 角平分线上的点到角两边的距离相等

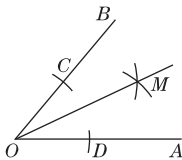


(第1题)

2. 作 $\angle AOB$ 的平分线时，以 O 为圆心，某一长度为半径作弧，与 OA, OB 分别相交于 C, D ，然后分别以 C, D 为圆心，适当的长度为半径作弧，使两弧相交于一点，则这个适当的长度为 (A)

- A. 大于 $\frac{1}{2}CD$
B. 等于 $\frac{1}{2}CD$
C. 小于 $\frac{1}{2}CD$
D. 以上答案都不对

3. (2015 · 玉林) 根据图中尺规作图的痕迹，先判断得出结论：OM 平分 $\angle BOA$ ，然后证明你的结论 (不要求写已知、求证)。

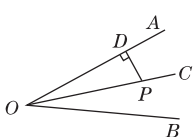


(第3题)

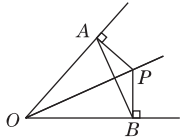
知识点2 角的平分线的性质

4. (2015 · 茂名) 如图， OC 是 $\angle AOB$ 的平分线， P 是 OC 上一点， $PD \perp OA$ 于点 D ， $PD = 6$ ，则点 P 到边 OB 的距离为 (A)

- A. 6
B. 5
C. 4
D. 3



(第4题)



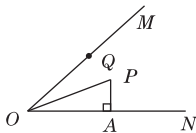
(第5题)

5. 如图， OP 平分 $\angle AOB$ ， $PA \perp OA$ ， $PB \perp OB$ ，垂足分别为 A, B 。下列结论中不一定成立的是 (D)

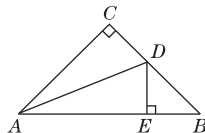
- A. $PA = PB$
B. PO 平分 $\angle APB$
C. $OA = OB$
D. AB 垂直平分 OP

6. 如图， OP 平分 $\angle MON$ ， $PA \perp ON$ 于点 A ， Q 是射线 OM 上的一个动点，若 $PA = 2$ ，则 PQ 的最小值为 (B)

- A. 1
B. 2
C. 3
D. 4



(第6题)

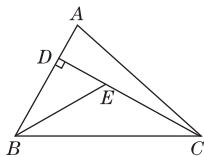


(第7题)

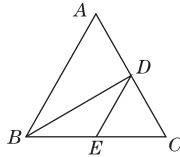
7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， AD 平分 $\angle CAB$ 交 BC 于 D ， $DE \perp AB$ 于 E ，若 $AB = 6$ cm，则 $\triangle DBE$ 的周长是 (A)

- A. 6 cm
B. 7 cm
C. 8 cm
D. 9 cm

8. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， CD 是 AB 边上的高线， BE 平分 $\angle ABC$ ，交 CD 于点 E ， $BC = 50$ ， $DE = 14$ ，则 $\triangle BCE$ 的面积等于 350。



(第8题)



(第9题)

易错点 运用角的平分线的性质时，常因忽略“到角两边的距离”而导致错误

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， BD 平分 $\angle ABC$ ，交 AC 于点 D ， BC 边上有一点 E ，连接 DE ，则 AD 与 DE 的关系为 (D)

- A. $AD > DE$
B. $AD = DE$
C. $AD < DE$
D. 不确定

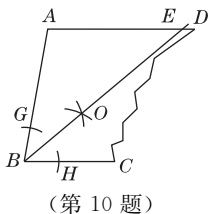


整合方法 · 提升练 (点拨见 177 页)

课后练

考查角度1 利用角平分线解线段和角的问题

10. (2015·宜昌) 如图, 一块余料 $ABCD$, $AD \parallel BC$, 现进行如下操作: 以点 B 为圆心, 适当长为半径画弧, 分别交 BA, BC 于点 G, H , 再分别以点 G, H 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}GH$ 的长为半径画弧, 两弧在 $\angle ABC$ 内部相交于点 O , 画射线 BO , 交 AD 于点 E .
- (1) 求证: $AB=AE$;
- (2) 若 $\angle A=100^\circ$, 求 $\angle EBC$ 的度数.



(第 10 题)

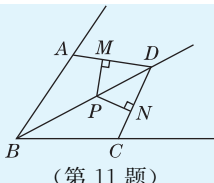
$\angle ABC$ 内部相交于点 O , 画射线 BO , 交 AD 于点 E .

(1) 证明: $\because AD \parallel BC, \therefore \angle AEB = \angle EBC$. $\because BE$ 是 $\angle ABC$ 的平分线, $\therefore \angle EBC = \angle ABE, \therefore \angle AEB = \angle ABE, \therefore AB = AE$;

(2) 解: 由 $\angle A = 100^\circ, \angle ABE = \angle AEB$, 得 $\angle ABE = \angle AEB = 40^\circ$. 由 $AD \parallel BC$, 得 $\angle EBC = \angle AEB = 40^\circ$.

考查角度2 利用角平分线的性质证线段相等

11. 如图, BD 为 $\angle ABC$ 的平分线, $AB=BC$, 点 P 在 BD 上, $PM \perp AD$ 于点 $M, PN \perp CD$ 于点 N . 求证: $PM=PN$.
- 证明: $\because BD$ 为 $\angle ABC$ 的平分线, $\therefore \angle ABD = \angle CBD$. 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 中, $\begin{cases} AB=BC, \\ \angle ABD=\angle CBD, \\ BD=BD, \end{cases}$ $\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD (SAS), \therefore \angle ADB = \angle CDB$. $\because$ 点 P 在 BD 上, $PM \perp AD, PN \perp CD, \therefore PM=PN$.



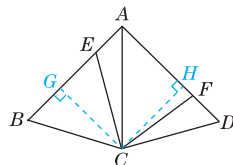
(第 11 题)

探究培优 · 拓展练 (点拨见 177 页)

课后练

拔尖角度1 利用角平分线的性质说明面积关系 (等面积代换法)

12. (2015·台湾) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, AC 为 $\angle BAD$ 的平分线, $AB=AD$, 点 E, F 分别在 AB, AD 上, 且 $AE=DF$, 请完整说明为何四边形 $AECF$ 的面积为四边形 $ABCD$ 的一半.

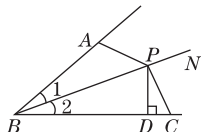


(第 12 题)

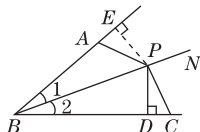
解: 如答图, 作 $CG \perp AB$ 于 $G, CH \perp AD$ 于 $H, \therefore AC$ 为 $\angle BAD$ 的平分线, $\therefore CG=CH, \therefore AB=AD, \therefore \triangle ABC$ 的面积 $= \triangle ACD$ 的面积, 又 $\because AE=DF, \therefore \triangle AEC$ 的面积 $= \triangle CDF$ 的面积, $\therefore \triangle BCE$ 的面积 $= \triangle ABC$ 的面积 $- \triangle AEC$ 的面积, $\triangle ACF$ 的面积 $= \triangle ACD$ 的面积 $- \triangle CDF$ 的面积, $\therefore \triangle BCE$ 的面积 $= \triangle ACF$ 的面积, $\therefore$ 四边形 $AECF$ 的面积 $= \triangle AEC$ 的面积 $+ \triangle ACF$ 的面积, $\therefore$ 四边形 $AECF$ 的面积 $= \triangle AEC$ 的面积 $+ \triangle BCE$ 的面积, $\therefore$ 四边形 $AECF$ 的面积 $= \triangle ABC$ 的面积, 又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 的面积 $= \triangle ABC$ 的面积 $+ \triangle ACD$ 的面积, $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积 $= 2\triangle ABC$ 的面积, $\therefore$ 四边形 $AECF$ 的面积为四边形 $ABCD$ 的一半.

拔尖角度2 利用角平分线的性质证角的和差关系 (转换邻补角法)

13. 如图, $\angle 1 = \angle 2, P$ 为 BN 上一点, 且 $PD \perp BC$ 于 $D, AB+BC=2BD$, 求证: $\angle BAP + \angle BCP = 180^\circ$.



(第 13 题)



(第 13 题答图)

解: 证法 1: 过点 P 作 $PE \perp BA$ 于 E , 如答图所示, $\because PD \perp$

$BC, \angle 1 = \angle 2, \therefore PE = PD$. 在 $Rt\triangle BPE$ 和 $Rt\triangle BPD$ 中, $\begin{cases} BP=BP, \\ PE=PD, \end{cases} \therefore Rt\triangle BPE \cong Rt\triangle BPD (HL), \therefore BE = BD. \therefore AB + BC = 2BD, BC = CD + BD, AB = BE - AE, \therefore AE = CD. \therefore PE \perp BE, PD \perp BC, \therefore \angle PEB = \angle PDC = 90^\circ$. 在

$\triangle PEA$ 和 $\triangle PDC$ 中, $\begin{cases} PE=PD, \\ \angle PEB=\angle PDC, \\ AE=CD, \end{cases} \therefore \triangle PEA \cong \triangle PDC (SAS), \therefore \angle PCB = \angle PAE$.

$\because \angle BAP + \angle EAP = 180^\circ, \therefore \angle BAP + \angle BCP = 180^\circ$.

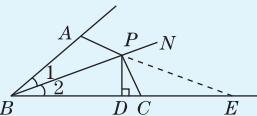
证法 2: 在 BC 上截取 $BF = BA$, 连接 PF , 如答图所示, $\because AB + BC = 2BD, \therefore BC - BD = BD - BF, \therefore CD = FD$. 在 $\triangle PDF$ 和 $\triangle PDC$ 中, $\begin{cases} DF=DC, \\ \angle PDF=\angle PDC=90^\circ, \\ PD=PD, \end{cases}$ (第 13 题答图)

$\therefore \triangle PDF \cong \triangle PDC (SAS), \therefore \angle PCB = \angle PFD$. 在 $\triangle BAP$ 和 $\triangle BFP$ 中, $\begin{cases} BA=BF, \\ \angle 1=\angle 2, \\ BP=BP, \end{cases} \therefore \triangle ABP \cong \triangle FBP (SAS), \therefore \angle BAP = \angle BFP$.

$\because \angle BFP + \angle PFC = 180^\circ, \therefore \angle BAP + \angle PCB = 180^\circ$.

证法 3: 在 BC 上取点 E , 使 $DE = BD$, 连接 PE , 如答图所示. $\because PD \perp BD, \therefore \angle BDP = \angle EDP = 90^\circ$. 在 $\triangle BDP$ 和 $\triangle EDP$ 中, $\begin{cases} BD=ED, \\ \angle BDP=\angle EDP, \\ PD=PD, \end{cases} \therefore \triangle BDP \cong \triangle EDP (SAS), \therefore BP = EP$.

$\because \angle 2 = \angle PEC$. 又 $\because \angle 1 = \angle 2, \therefore \angle 1 = \angle PEC$. $\because AB + BC = 2BD, DE = BD, \therefore AB = CE$. 在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle CEP$ 中, $\begin{cases} AB=CE, \\ \angle 1=\angle PEC, \\ BP=EP, \end{cases} \therefore \triangle ABP \cong \triangle CEP (SAS), \therefore \angle BAP = \angle ECP$. 又 $\because \angle BCP + \angle ECP = 180^\circ, \therefore \angle BAP + \angle BCP = 180^\circ$.



(第 13 题答图)

教你一招

- 运用角的平分线的性质解决与面积有关的问题的方法: 首先运用三角形的面积公式将面积关系转化为线段关系, 再结合角的平分线的性质进一步转化为三角形边长之间的关系, 从而把两者建立起关系, 结合已知条件可解决问题.
- 过角平分线上一点作垂线是解决有关角平分线问题最常用的作辅助线的方法.